Fundamentals of Physics II

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2025

اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تاکنون کسب کرده‌اید

If you always think the way you've always thought, you'll always get what you've always got.

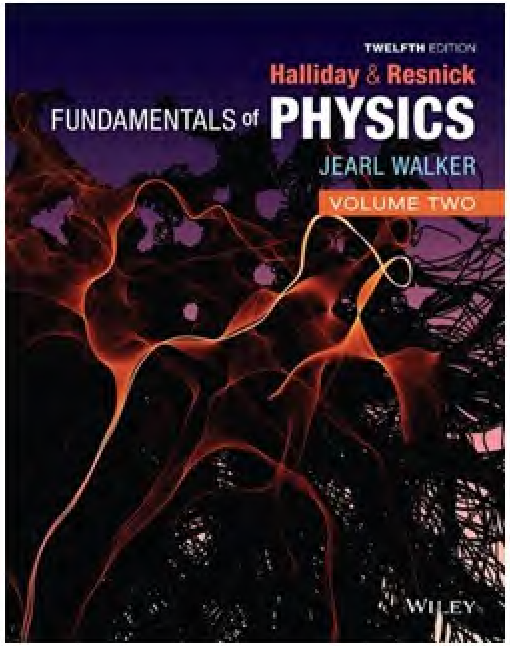
دانشگاه خوارزمی

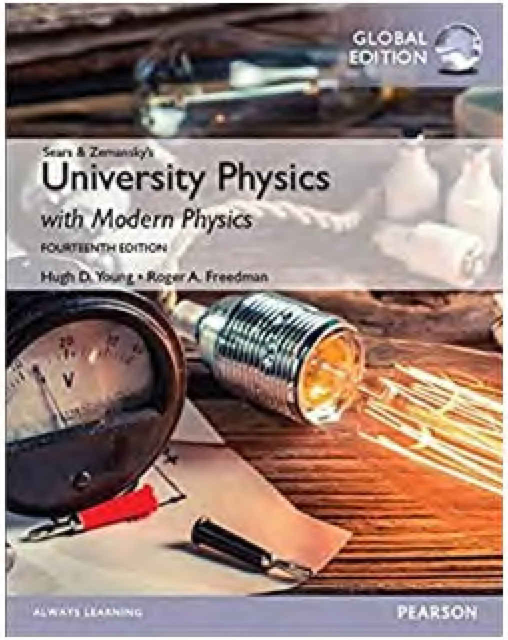
Fundamentals of Physics (12th Ed.)
Halliday, David; Resnick, Robert; Walker, Jearl

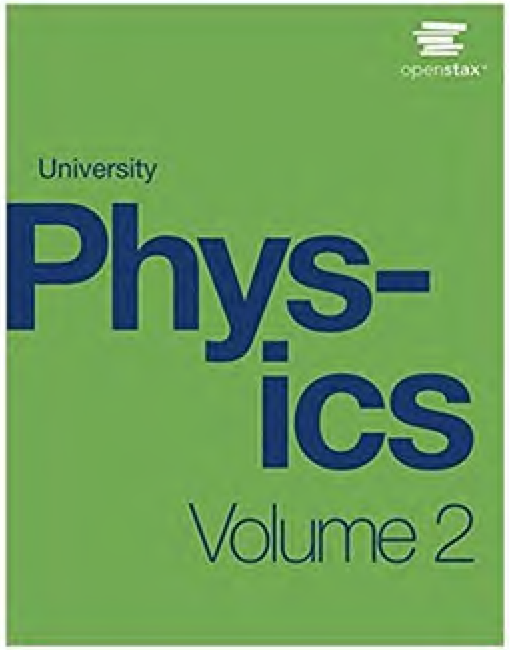
University Physics with Modern Physics (14th Global Ed.)
Hugh D. Young, Roger A. Freedman

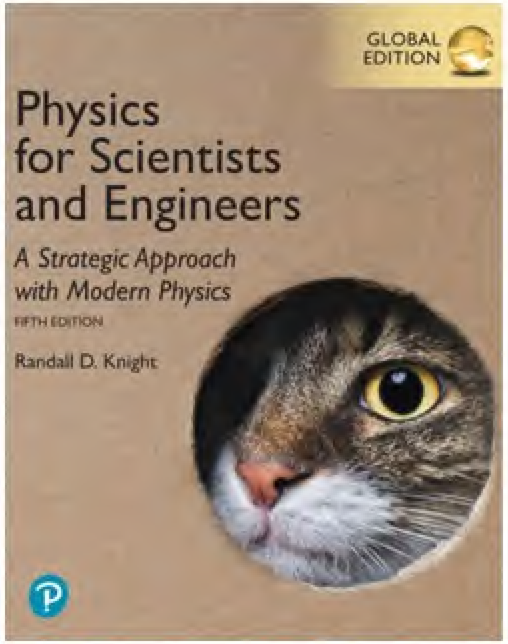
University Physics Volume 2
Samuel J. Ling, Jeff Sanny, William Moebs

P H Y S I C S For Scientists and Engineers, 5e, (2023)
Randall D. Knight









دانشگاه خوارزمی

درس هفتم

بار الکتریکی- حل چند مسئله

Electric Charge-Solved Problems

دانشگاه خوارزمی

بار الکتریکی یک مول پروتون، ثابت فارادی نامیده می‌شود. مقدار عددی آن چه قدر است؟

حل:

منظور از یک مول، تعداد $N_0=6.02\times10^{23}$ است که آن را عدد آووگادرو می‌نامیم.

بنابراین بار الکتریکیِ یک مول پروتون برابر است با

$$q=N_0e=(6.02\times10^{23})(1.6\times10^{-19})=\mathbf{9.63\times10^{4}\ C}$$

این مقدار بارِ الکتریکی، با تجمعِ تعدادِ بسیار زیادی پروتون حاصل شده است و واضح است که مقدار بسیار زیادی است.

بار الکتریکیِ جاری در یك لامپ معمولی برابر با $1.5\ \mathrm{C/s}$ است. این مقدار بار، معادلِ چند الکترون در ثانیه است؟

حل:

$$q = ne \Rightarrow n = \frac{q}{e} = \frac{1.5\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}}{1.6\times 10^{-19}\mathrm{C}} = 9.4\times 10^{18} \quad \frac{\text{تعداد}}{\text{ثانیه}}$$

در این مسئله دقت کنید که q بر حسب کولن بر ثانیه نوشته شده است (یعنی در حقیقت جریان الکتریکی است). پس نتیجه‌ی به دست آمده، آهنگِ شارشِ الکترون‌ها، یا به بیان دیگر، تعداد الکترون‌ها در واحد زمان را نشان می‌دهد.

چه مقدار بارِ منفی و چه مقدار بارِ مثبت، در یک لیوان آب (۲۵۰ گرم) موجود است؟

حل: لازم است تعداد اتم‌ها را در ۲۵۰ گرم آب حساب کنیم. می‌دانیم که جرم مولکولیِ آب، یعنی جرمِ یك مول از مولکول‌های آب، برابر با M=18 g/mol است. بنابر این جرم یک مولکول آب برابر است با:

$$m_0 = \frac{M}{N_0} = \frac{18}{6.02 \times 10^{23}}\,\mathrm{g}$$

اگر تعداد مولکول‌های آب را در ۲۵۰ گرم آب، N بنامیم، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$m = Nm_0 = \frac{NM}{N_0} \Rightarrow N = \frac{N_0 m}{M} = \frac{(250)(6.02 \times 10^{23})}{18} = 83.6 \times 10^{23}$$

عدد فوق، تعداد مولکول‌ها را در ۲۵۰ گرم آب نشان می‌دهد

می‌دانیم که هر مولکول آب از دو اتم هیدروژن و یك اتم اکسیژن درست شده است. هر اتم هیدروژن یك الکترون و هر اتم اکسیژن هشت الکترون دارند. بنابراین هر مولکولِ آب شامل ده الکترون و معادل آن پروتون است. بار هر الکترون ($-e$) است، پس مقدار بار منفی در ۲۵۰ گرم آب برابر است با:

$$q = (10)(-e)N = (83.6 \times 10^{23})(10)(-1.6 \times 10^{-19}) = -13.4 \times 10^{6}\,\mathrm{C}$$

البته همین مقدار بارِ مثبت نیز در یك لیوان آب وجود دارد.

دانشگاه خوارزمی

کل بار هر یک از توزیع بارهای زیر را تعیین کنید

الف) بار خطی λ_0 به طور یکنواخت بر روی حلقه‌ای دایره‌ای به شعاعِ a توزیع شده است.

ب) بار سطحی σ_0 به طور یکنواخت بر سطح قرص دایره‌ای به شعاعِ R توزیع شده است.

ج) بار حجمی ρ_0 به طور یکنواخت درون حجم کره‌ای به شعاعِ R توزیع شده است.

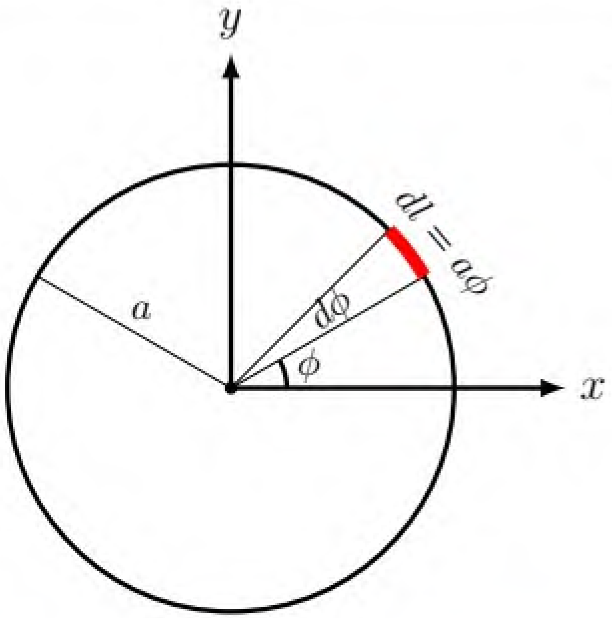
د) بار خطی بر روی محور z با چگالی $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{1+\frac{z^2}{a^2}}$ توزیع شده است.

دانشگاه خوارزمی

الف) بار خطی λ_0 به طور یکنواخت بر روی حلقه‌ای دایره‌ای به شعاعِ a توزیع شده است.

روش اول: چون چگالی خطی بار الکتریکی ثابت است، می توان نوشت:

$$\lambda_0 = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2\pi a} \quad \Rightarrow Q = \lambda_0 2\pi a$$



روش دوم: می‌توان با انتخاب یك عنصرِ طول و انتگرال‌گیری، مسئله را حل کرد:

$$Q = \int dq = \int \lambda_0 dl$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \lambda_0 a d\phi = \lambda_0 a \int_0^{2\pi} d\phi = \lambda_0 a 2\pi$$

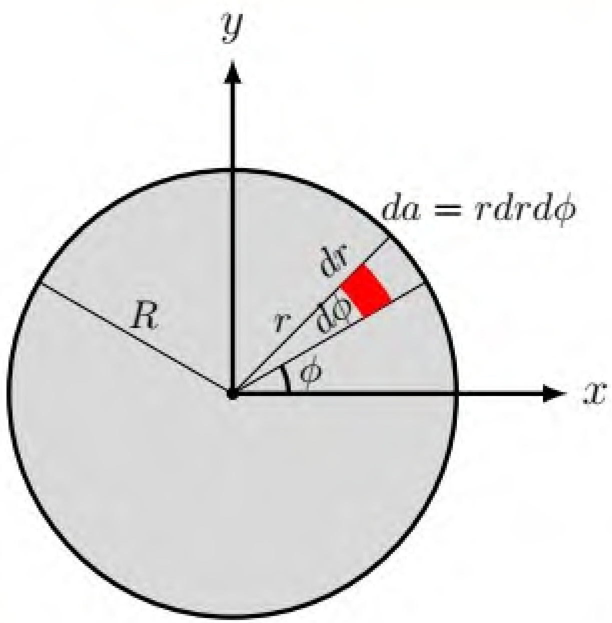
دانشگاه خوارزمی

ب) بار سطحی σ_0 به طور یکنواخت بر سطح قرص دایره‌ای به شعاعِ R توزیع شده است.

روش اول: چون چگالی سطحی بار الکتریکی ثابت است، می توان نوشت:

$$\sigma_0 = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi R^2} \quad \Rightarrow Q = \sigma_0 \pi R^2$$

روش دوم: می‌توان با انتخاب یك عنصرِ سطح و انتگرال‌گیری، مسئله را حل کرد:



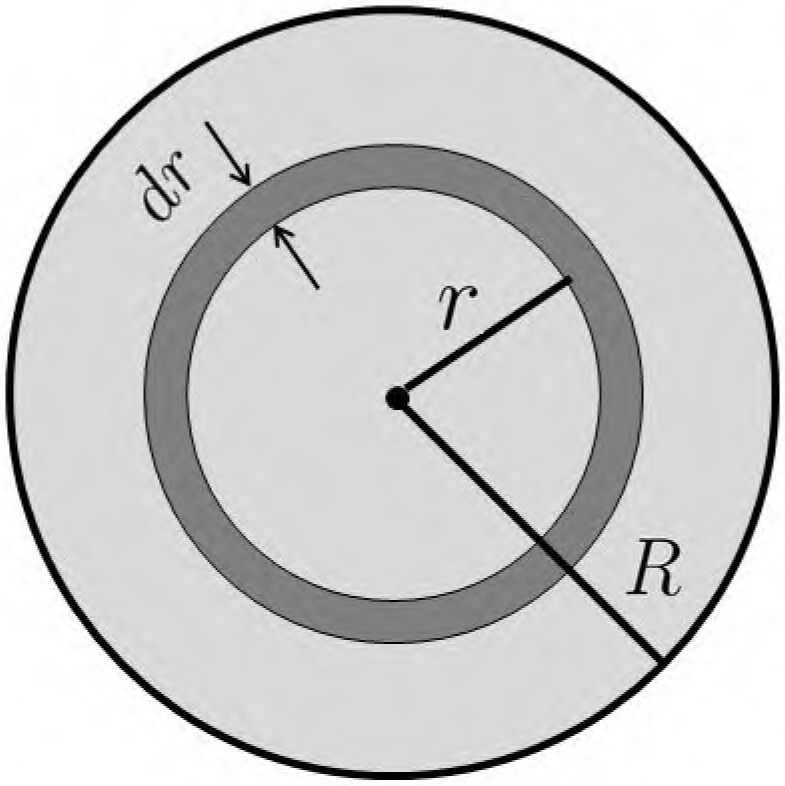
$$Q = \int dq = \int \sigma_0 da$$

$$Q = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \sigma_0 r dr d\phi = \sigma_0 \int_{\phi=0}^{2\pi} \left\{ \int_{r=0}^{R} r dr \right\} d\phi$$

$$Q = \sigma_0 \int_{\phi=0}^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R \right\} d\phi = \sigma_0 \frac{1}{2} R^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = \sigma_0 \pi R^2$$

دانشگاه خوارزمی

نکته:گاهی با توجه به تقارنِ مسئله می‌توان عنصرِ سطح را به گونه‌ای انتخاب کرد که از انتگرال‌گیریِ دوگانه اجتناب شود. مثلاً در این مسئله چون چگالی بارِ الکتریکی به ϕ بستگی ندارد. می‌توان عنصرِ سطح را به شکل حلقه‌ایی به شعاعِ r و ضخامتِ dr در نظر گرفت .در این صورت مساحت این عنصرِ سطح برابر است با $da = 2\pi r dr$



$$Q = \int_{r=0}^{R} \sigma_0 2\pi r dr = \sigma_0 2\pi \left(\frac{1}{2} R^2 \right) = \sigma_0 \pi R^2$$

ج) بار حجمی ρ_0 به طور یکنواخت درون حجم کره‌ای به شعاعِ R توزیع شده است.

روش اول: چون چگالی حجمی بار الکتریکی ثابت است، می توان نوشت:

$$\rho_0 = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \Rightarrow Q = \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3$$

روش دوم: می‌توان با انتخاب یك عنصرِ حجم و انتگرال‌گیری، مسئله را حل کرد:

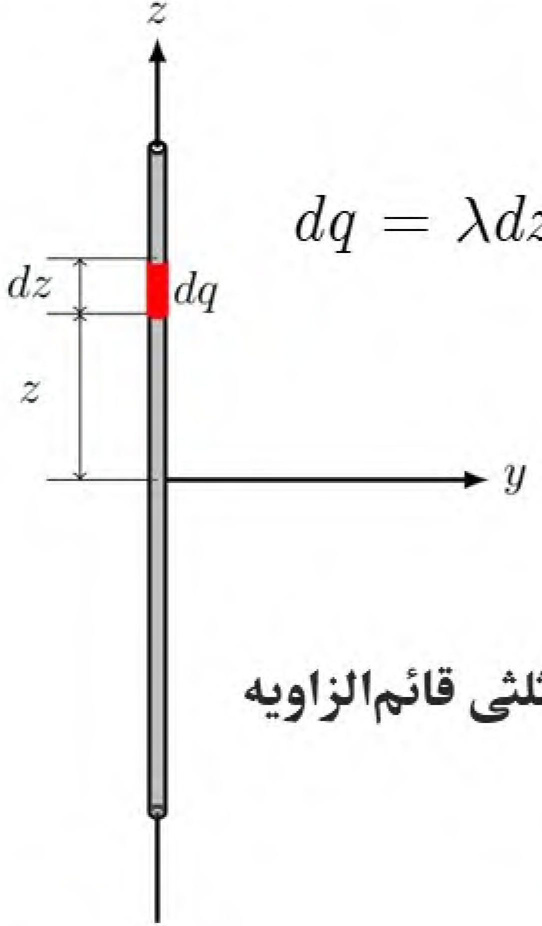
$$dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$Q = \int \rho_0 dv = \rho_0 \int\int\int r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta d\phi$$

$$Q = \rho_0 \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \rho_0 4\pi \int_0^R r^2 dr = \rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3$$

دانشگاه خوارزمی

د) بار خطی بر روی محور z با چگالی $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{1+\dfrac{z^2}{a^2}}$ توزیع شده است.

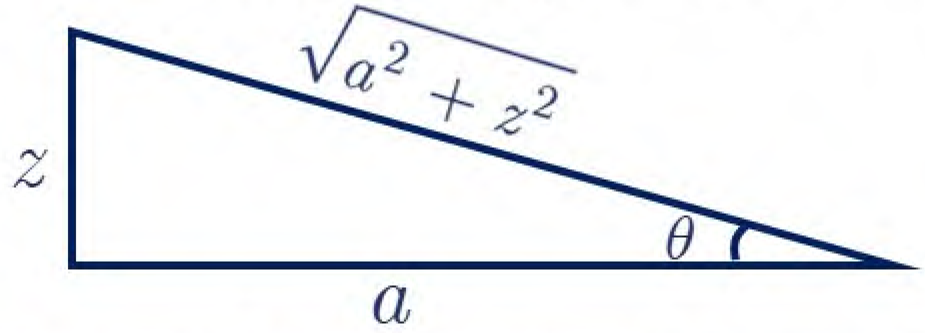


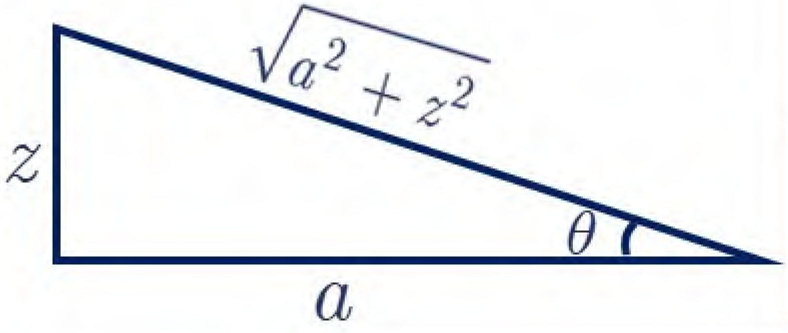
در این‌جا چگالی بار الکتریکی یکنواخت نیست،

$$dq = \lambda dz = \frac{\lambda_0}{1+\dfrac{z^2}{a^2}}dz$$

$$\boxed{Q = \int dq = \lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\dfrac{z^2}{a^2}}dz}$$

برای محاسبه‌ی چنین انتگرال‌هایی تغییرِ متغیرِ $z = a\tan\theta$ را به کار می‌بریم. یعنی در واقع مثلث قائم‌الزاویه در نظر می‌گیریم که دو ضلع قائمِ آن a و z باشند به گونه‌ای که ضلعِ z روبروی زاویه‌ی θ باشد.





$$\theta = \tan^{-1}\frac{z}{a} \Rightarrow \begin{cases} z = +\infty \Rightarrow \theta = +\dfrac{\pi}{2} \\ z = -\infty \Rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$z = a\tan\theta$$
$$dz = a\left(1 + \tan^2\theta\right)d\theta$$

$$Q = \lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\dfrac{z^2}{a^2}}\,dz = \lambda_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{a\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta}{1+\tan^2\theta}$$
$$= \lambda_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} a\,d\theta = \lambda_0 a\left[+\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \lambda_0 a\pi$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید

Be happy and kind

دانشگاه خوارزمی