Fundamentals of Physics II

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri

Spring 2025

اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تاکنون کسب کرده‌اید

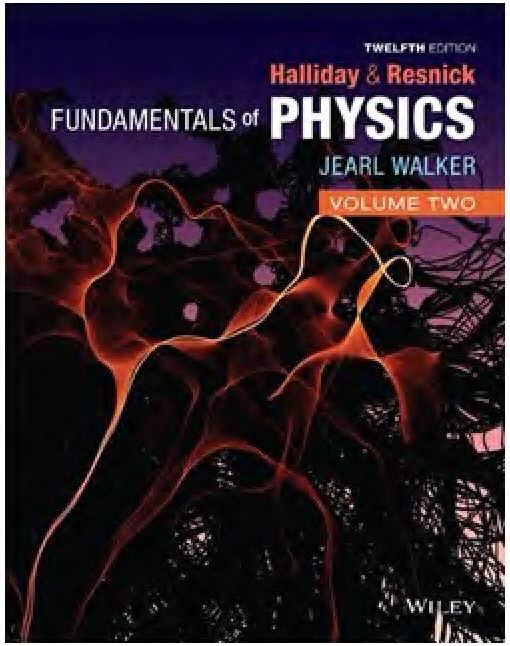
If you always think the way you've always thought, you'll always get what you've always got.

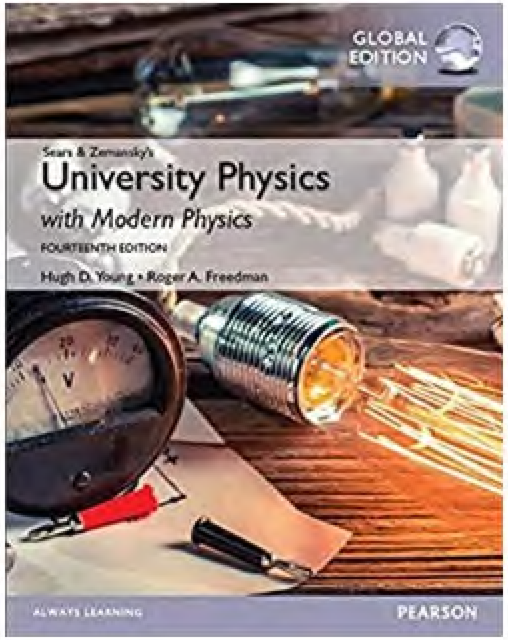
Fundamentals of Physics (12th Ed.)
Halliday, David;
Resnick, Robert;
Walker, Jearl

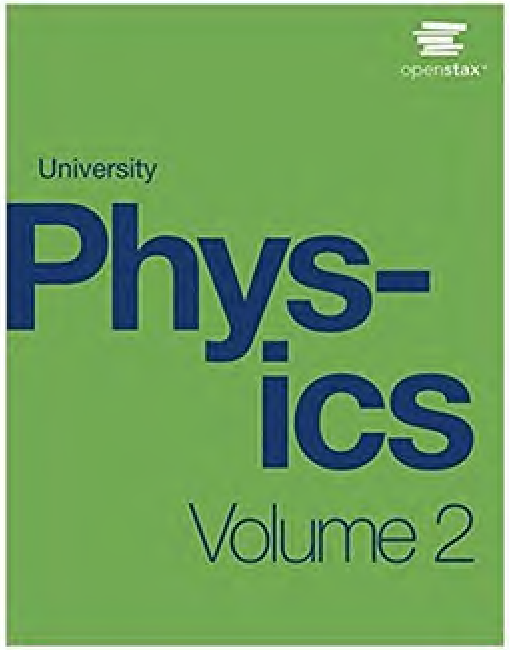
University Physics with Modern Physics (14th Global Ed.)
Hugh D. Young,
Roger A. Freedman

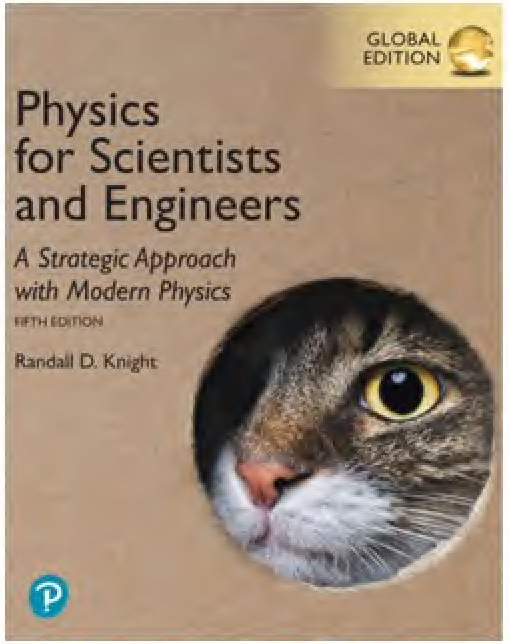
University Physics Volume 2
Samuel J. Ling, Jeff Sanny, William Moebs

PHYSICS For Scientists and Engineers, 5e, (2023)
Randall D. Knight


TWELFTH EDITION
Halliday & Resnick
FUNDAMENTALS of PHYSICS
JEARL WALKER
VOLUME TWO
WILEY


GLOBAL EDITION
Sears & Zemansky's
University Physics
with Modern Physics
FOURTEENTH EDITION
Hugh D. Young • Roger A. Freedman
ALWAYS LEARNING
PEARSON


openstax
University
Phys-ics
Volume 2


GLOBAL EDITION
Physics for Scientists and Engineers
A Strategic Approach with Modern Physics
FIFTH EDITION
Randall D. Knight

درس دوازدهم

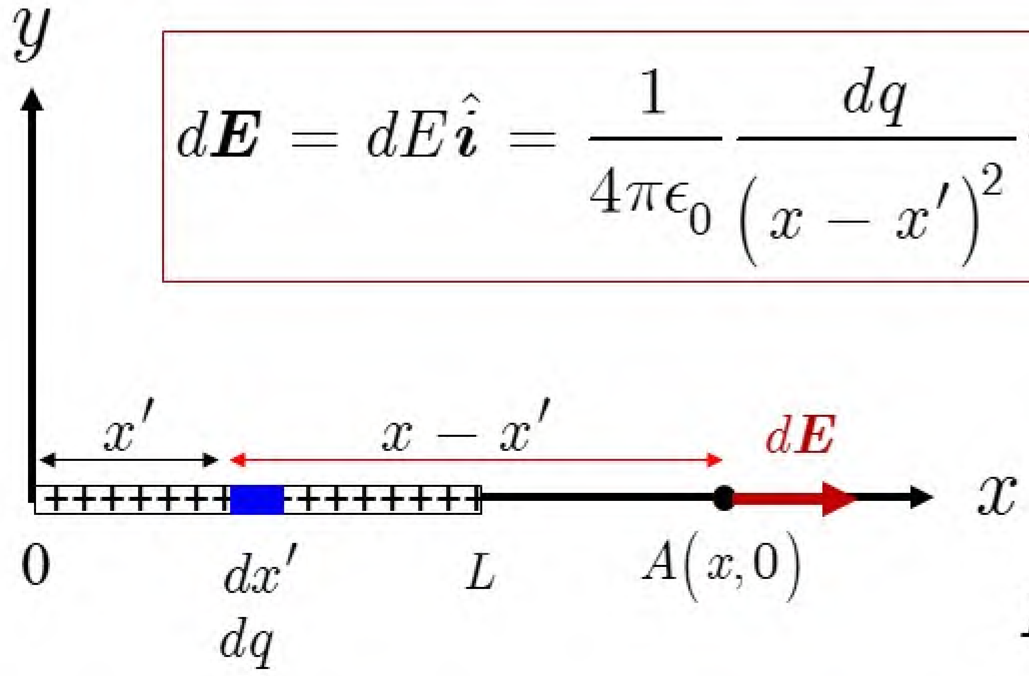
میدان الکتریکی - حل چند مسئله

Electric Field-Solved Problems

دانشگاه خوارزمی

مسئله‌ی ۱

بار الکتریکی Q به طور یکنواخت بر میله‌ای به طول L توزیع شده است. میدان الکتریکی را در امتداد میله (نقطه‌ی A) پیدا کنید.



$$\boxed{d\boldsymbol{E} = dE\,\hat{\boldsymbol{i}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\left(x - x'\right)^2}\hat{\boldsymbol{i}}}$$

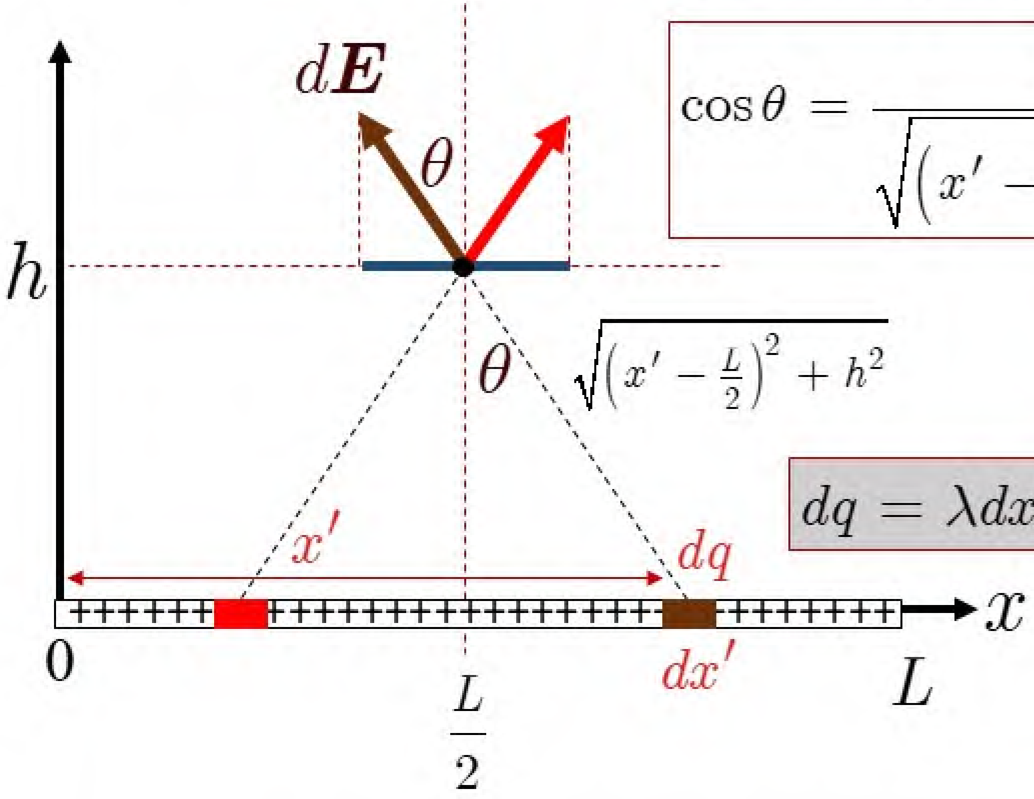
$$\boxed{dq = \lambda dx' = \frac{Q}{L}dx'}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \int d\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{i}}\int dE}$$

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{i}}\,\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{\lambda dx'}{\left(x - x'\right)^2} = \hat{\boldsymbol{i}}\,\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x - x'}\right)\Bigg|_{x'=0}^{x'=L}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{i}}\,\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\frac{1}{x - L} - \frac{1}{x}\right)}$$

میدان الکتریکی ناشی از یک میله‌ی باردار یکنواخت متناهی در نقطه‌ای روی عمود منصف میله


$d\boldsymbol{E}$
θ
h
θ
$\sqrt{\left(x'-\frac{L}{2}\right)^2+h^2}$
x'
dq
x
0
$\frac{L}{2}$
dx'
L

$$dq = \lambda dx'$$

$$\cos\theta = \frac{h}{\sqrt{\left(x'-\frac{L}{2}\right)^2+h^2}}$$

$$\left|d\boldsymbol{E}\right| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\left(x'-\frac{L}{2}\right)^2+h^2}$$

$$E_x = \int dE_x = 0$$

$$E = E_y = \int dE_y = \int dE\cos\theta$$

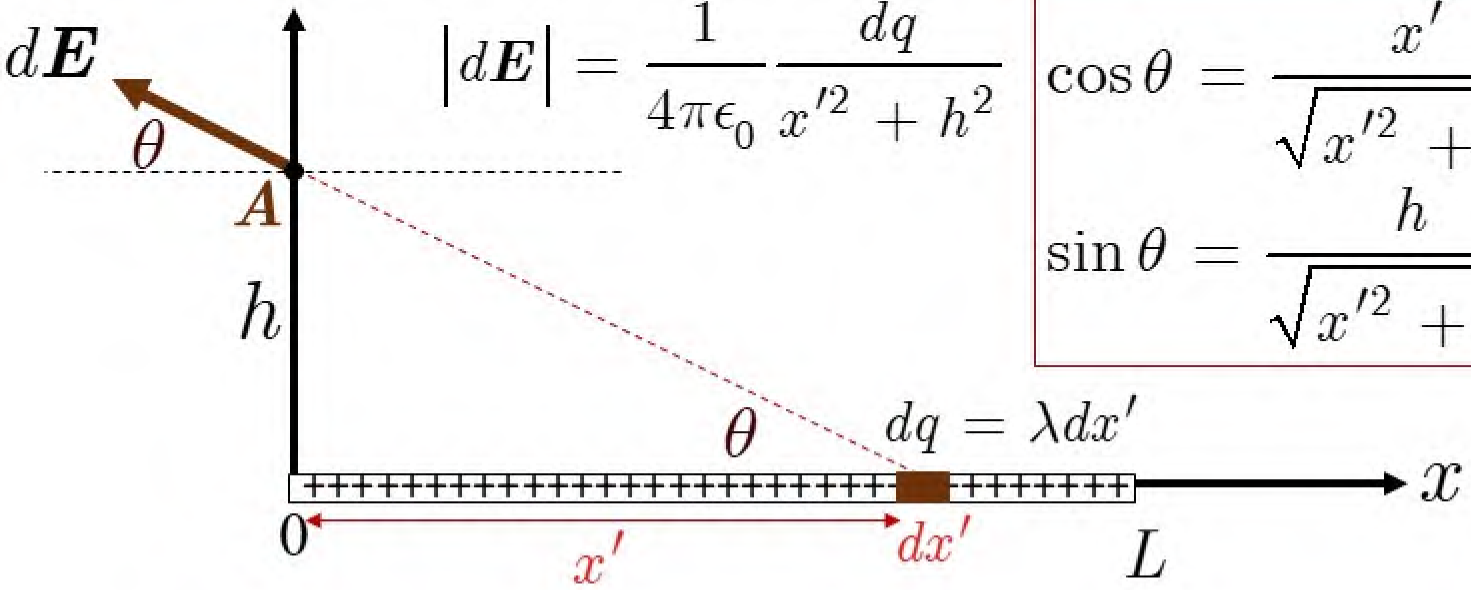
$$E = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx'}{\left[\left(x'-\frac{L}{2}\right)^2+h^2\right]}\frac{h}{\sqrt{\left(x'-\frac{L}{2}\right)^2+h^2}}$$

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}h\int_0^L \frac{dx'}{\left[\left(x'-\frac{L}{2}\right)^2+h^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h\sqrt{4h^2+L^2}}\hat{\boldsymbol{j}}}$$

مسئله‌ی ۳

بار الکتریکی Q به طور یکنواخت بر میله‌ای به طول L توزیع شده است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی (A) پیدا کنید.



$$\left|d\boldsymbol{E}\right| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{x'^2+h^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x'}{\sqrt{x'^2+h^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{h}{\sqrt{x'^2+h^2}}$$

$$E_x = \int dE_x = \int -dE\cos\theta = -\int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx'}{\left(x'^2+h^2\right)}\frac{x'}{\sqrt{x'^2+h^2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{x'dx'}{\left(x'^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE\sin\theta = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx'}{\left(x'^2+h^2\right)}\frac{h}{\sqrt{x'^2+h^2}} = \frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx'}{\left(x'^2+h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ادامه‌ی مسئله‌ی ۳

$$\boxed{E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{x'dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

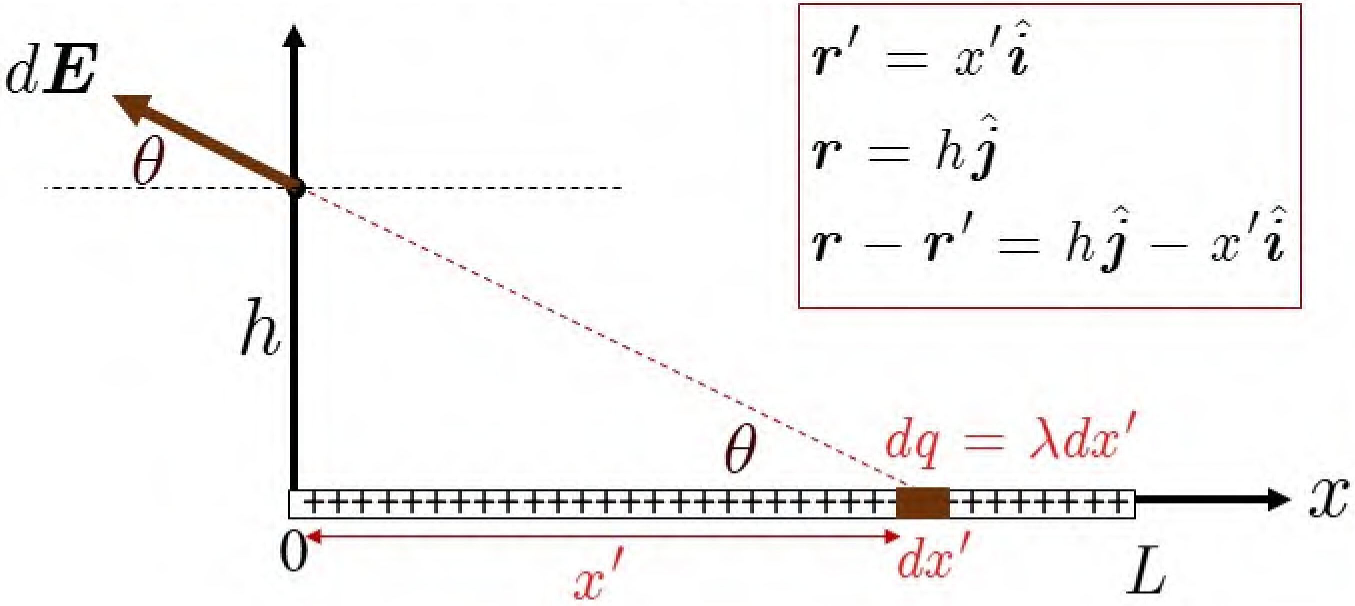
$$\boxed{E_x = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + L^2}}\right]}$$

$$\boxed{E_y = \frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

$$\boxed{E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h\sqrt{h^2 + L^2}}}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{Q}{L}}$$

حل مسئله‌ی ۳ با نمادگذاری برداری



$$\boldsymbol{r}' = x'\hat{\boldsymbol{i}}$$
$$\boldsymbol{r} = h\hat{\boldsymbol{j}}$$
$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' = h\hat{\boldsymbol{j}} - x'\hat{\boldsymbol{i}}$$

$$d\boldsymbol{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right|^3} = \frac{\lambda dx'}{4\pi\epsilon_0}\frac{h\hat{\boldsymbol{j}} - x'\hat{\boldsymbol{i}}}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\boldsymbol{E} = \int d\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{h\hat{\boldsymbol{j}} - x'\hat{\boldsymbol{i}}}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx'$$

$$\boldsymbol{E} = \int d\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{j}}\,\frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \hat{\boldsymbol{i}}\,\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{x'dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{x'dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ادامه‌ی مسئله‌ی ۳

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{x'dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_x = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + L^2}}\right]$$

$$E_y = \frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx'}{\left(x'^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 h\sqrt{h^2 + L^2}}$$

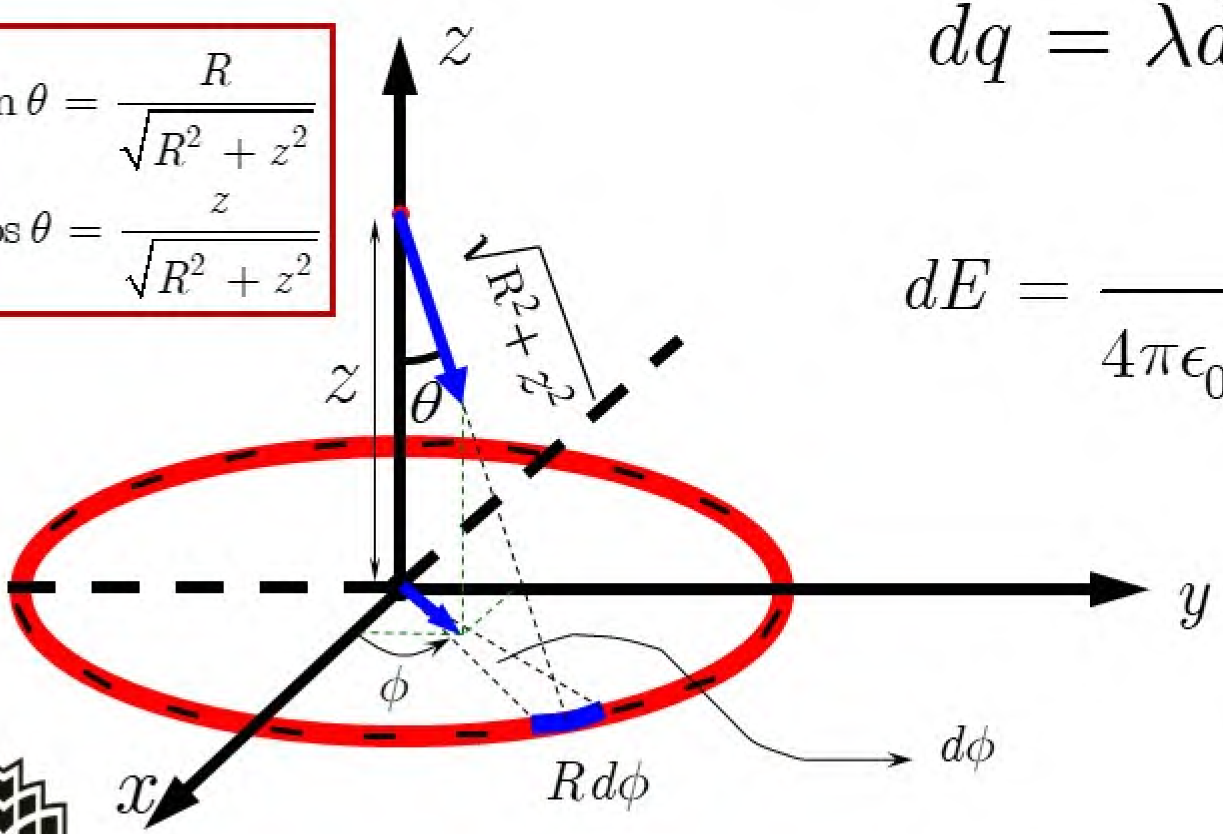
$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

مسئله‌ی ۴

بار الکتریکی Q به طور یکنواخت بر حلقه ی دایره ای به شعاع R توزیع شده است. میدان الکتریکی را بر روی محور حلقه در فاصله‌ی z پیدا کنید. (بار حلقه را منفی در نظر گرفته‌ایم)

$$\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$



$$dq = \lambda dl \qquad dq = \frac{Q}{2\pi R} R d\phi$$

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\left(R^2 + z^2\right)}$$

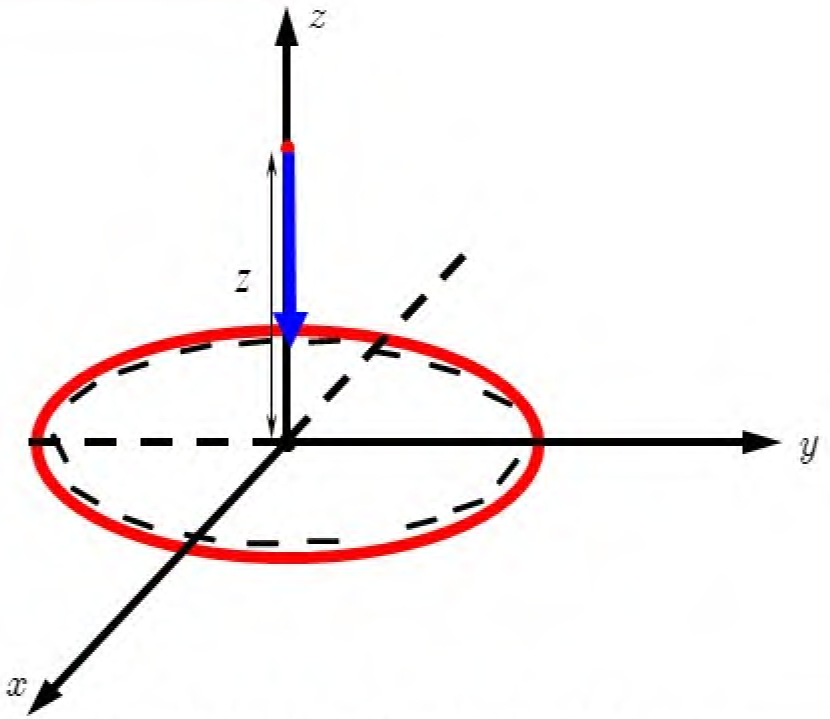
$$\begin{aligned} dE_x &= dE\sin\theta\cos\phi \\ dE_y &= dE\sin\theta\sin\phi \\ dE_z &= dE\cos\theta \end{aligned}$$

ادامه‌ی مسئله‌ی ۴

$$
\begin{aligned}
E_x &= \int dE_x = \int dE \sin\theta \cos\phi \\
E_y &= \int dE_y = \int dE \sin\theta \sin\phi \\
E_z &= \int dE_z = \int dE \cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = 0 \\
E_y &= \frac{\lambda R^2}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi = 0 \\
E_z &= \frac{\lambda R z}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\phi
\end{aligned}
$$

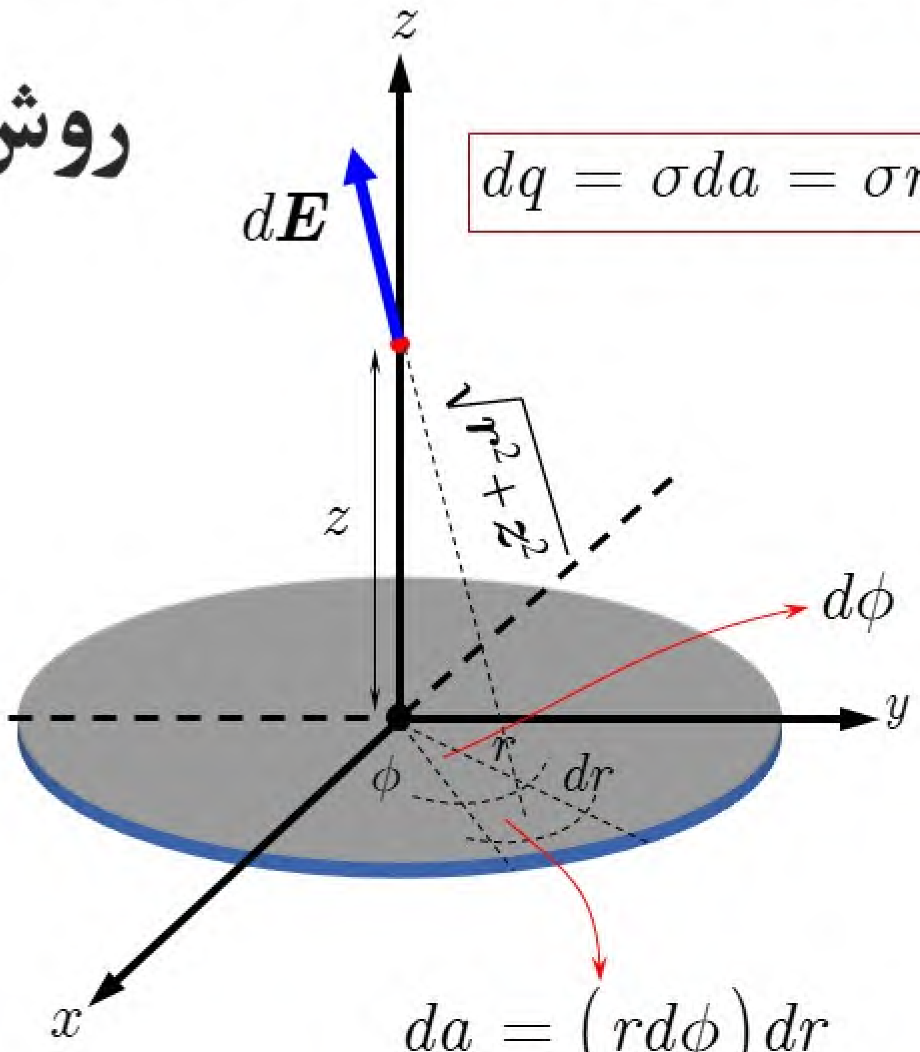
$$
\begin{aligned}
E = E_z &= \frac{\lambda 2\pi R z}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{Q z}{4\pi\epsilon_0 \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$



مسئله‌ی ۵

بار الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی σ بر روی قرص دایره ای به شعاع R توزیع شده است. میدان الکتریکی را با توجه به شکل زیر در نقطه‌ی $(0,z)$ پیدا کنید.

روش اول



$$\boxed{dq = \sigma da = \sigma r dr d\phi}$$

$$da = \left(r d\phi\right) dr$$

$$dE = \frac{\sigma da}{4\pi\epsilon_0\left(r^2 + z^2\right)}$$

$$\boxed{dE_z = dE\cos\theta = dE\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}}$$

$$\boxed{dE_x = dE\sin\theta\cos\phi = dE\frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}}\cos\phi}$$

$$\boxed{dE_y = dE\sin\theta\sin\phi = dE\frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}}\sin\phi}$$

ادامه‌ی مسئله‌ی ۵

$$dE_z = dE\cos\theta = dE\,\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$dE_x = dE\sin\theta\cos\phi = dE\,\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\cos\phi = \frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\cos\phi}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$dE_y = dE\sin\theta\sin\phi = dE\,\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\sin\phi = \frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\sin\phi}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

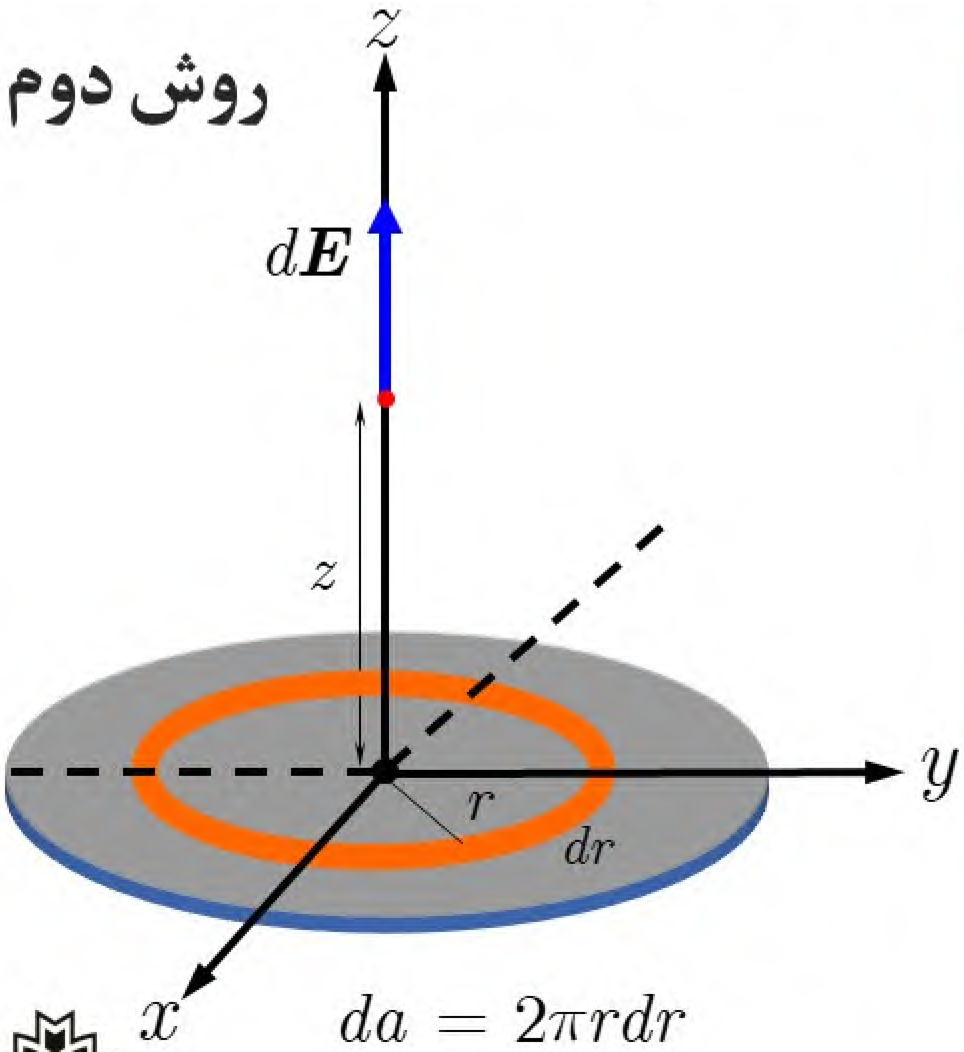
$$E_z = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$E_x = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\cos\phi}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = 0$$

$$E_y = \int_{r=0}^{r=R}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi}\frac{\sigma r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\sin\phi}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = 0$$

ادامه‌ی مسئله‌ی ۵

روش دوم



$$da = 2\pi r dr$$

$$dq = \sigma da = \sigma 2\pi r dr$$

$$\boxed{dE = \frac{dqz}{4\pi\epsilon_0\left(r^2 + z^2\right)^{3/2}}}$$

میدان ناشی از حلقه‌ی باردار
بر روی محور آن

$$\boxed{E = \frac{z\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\int_{r=0}^{r=R} \frac{rdr}{\left(r^2 + z^2\right)^{3/2}}}$$

$$\boxed{r^2 + z^2 = u^2 \Rightarrow rdr = udu}$$

$$E = \frac{z\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{udu}{u^3} = \frac{z\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{u}\right] = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right]_{r=0}^{r=R}$$

$$E = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right]$$

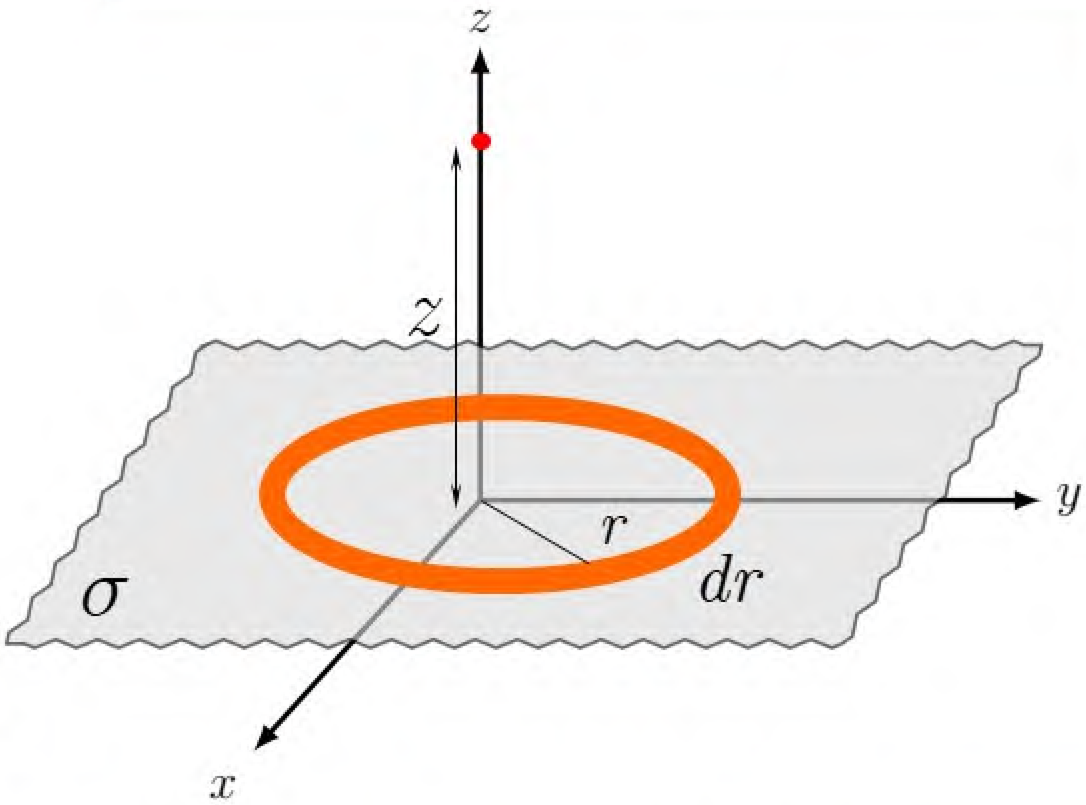
$$\boxed{|z| = \begin{cases} z & z > 0 \\ -z & z < 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \hat{k}\,\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right] & z > 0 \\ -\hat{k}\,\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 + \dfrac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right] & z < 0 \end{cases}}$$

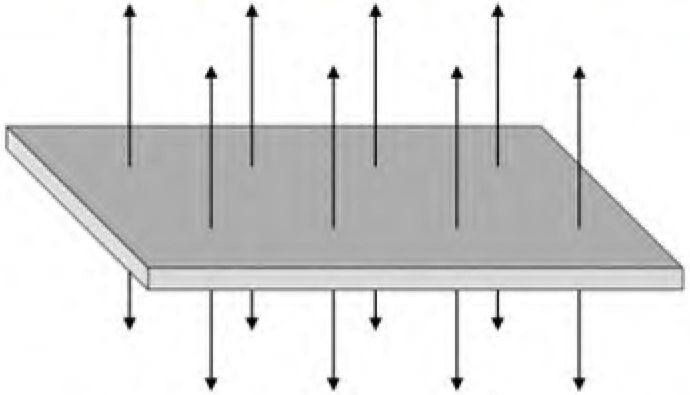
مسئله‌ی ۶

میدان الکتریکی ناشی از یک ورقه‌ی نارسانای نازک با ابعاد بی نهایت و چگالی سطحی بار یکنواخت.

$$E = \frac{z\sigma 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\int_{r=0}^{r=\infty}\frac{rdr}{\left(r^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right]_{r=0}^{r=\infty} = \frac{z\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{z^2}}\right]$$

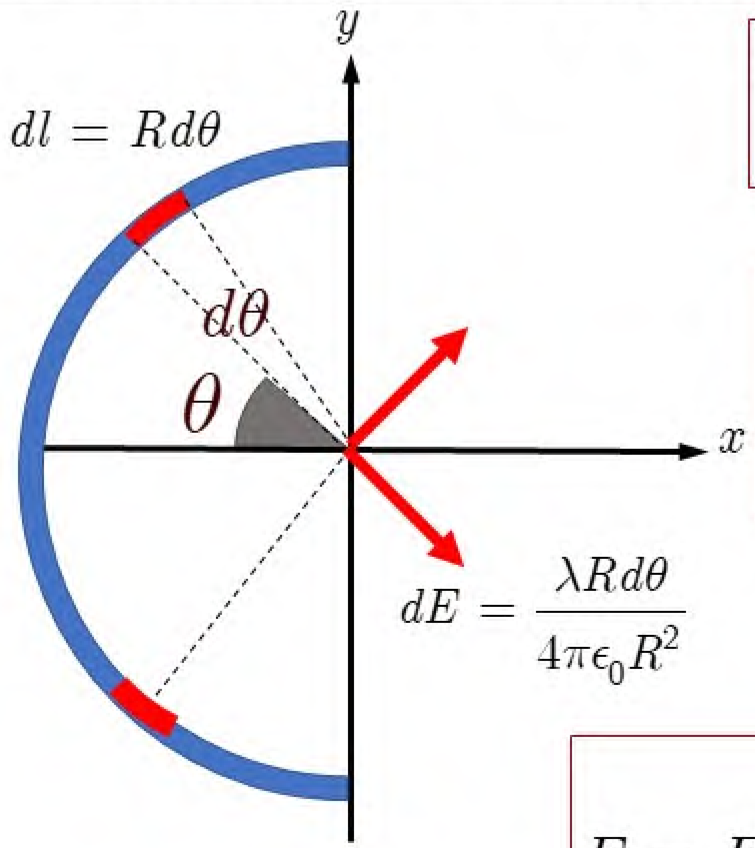


$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \hat{k}\,\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & z > 0 \\ -\hat{k}\,\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} & z < 0 \end{cases}$$



مسئله‌ی ۷

بار الکتریکی $+Q$ به طور یکنواخت بر یک میله‌ی شیشه‌ای به شکل نیم‌دایره به شعاع R توزیع شده است. میدان الکتریکی در مرکز نیم دایره چقدر است؟



$$dE = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

عنصر $dl=Rd\theta$ را با بار الکتریکیِ $dq=\lambda Rd\theta$ بر روی میله در نظر می‌گیریم. میدان الکتریکی ناشی از این عنصر در مرکز نیم‌دایره برابر است با

$$dE = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

با توجه به تقارن مسئله، واضح است که:

$$E_y = \int dE_y = 0$$

$$E = E_x = \int dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

اما چون توزیع بار یکنواخت است: $\lambda = \frac{Q}{\pi R}$ بنابر این:

$$\boxed{E = \frac{Q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}}$$

شاد و مهربان باشید