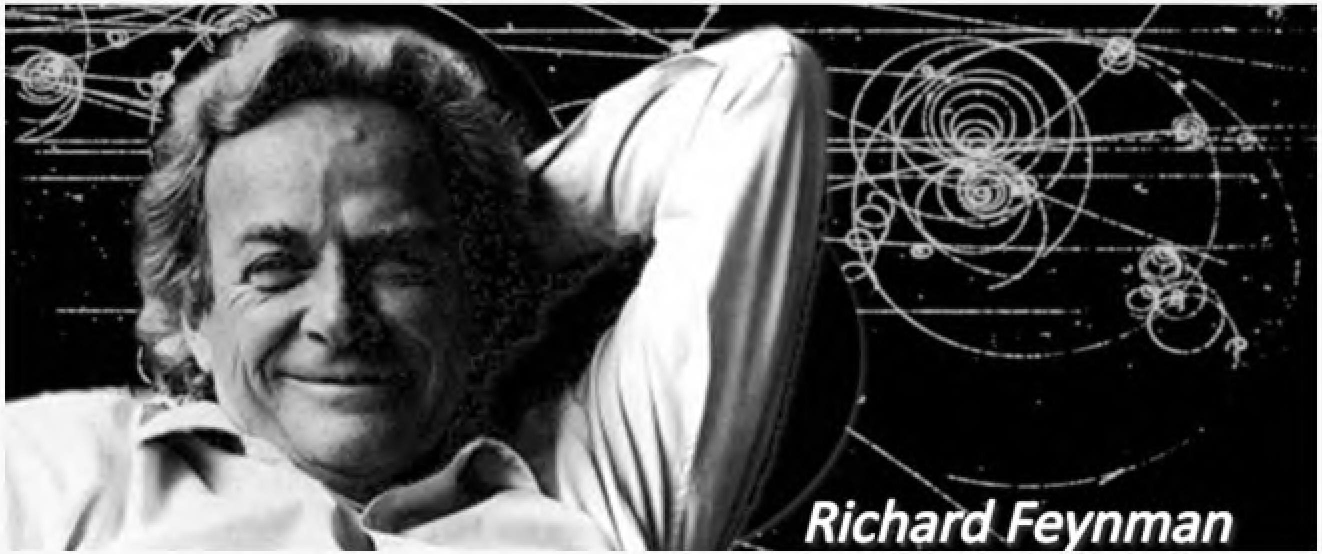
Electromagnetism I

Faculty of Physics-Kharazmi University

Dr. Faramarz Kanjouri



اگر همواره مانند گذشته بیندیشید، همیشه همان چیزهایی را به‌دست می‌آورید که تا کنون کسب کرده‌اید

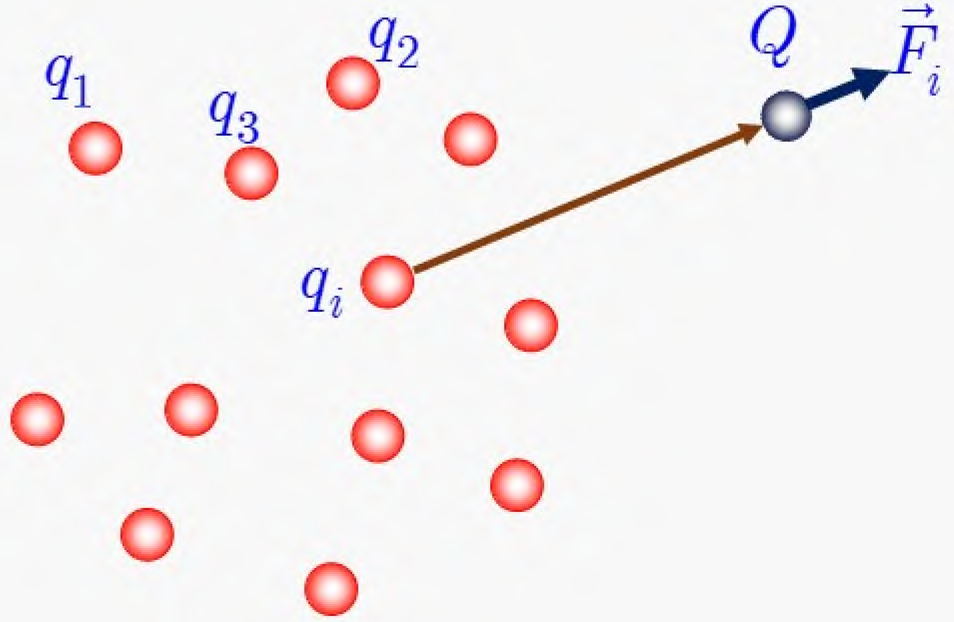
فاینمن

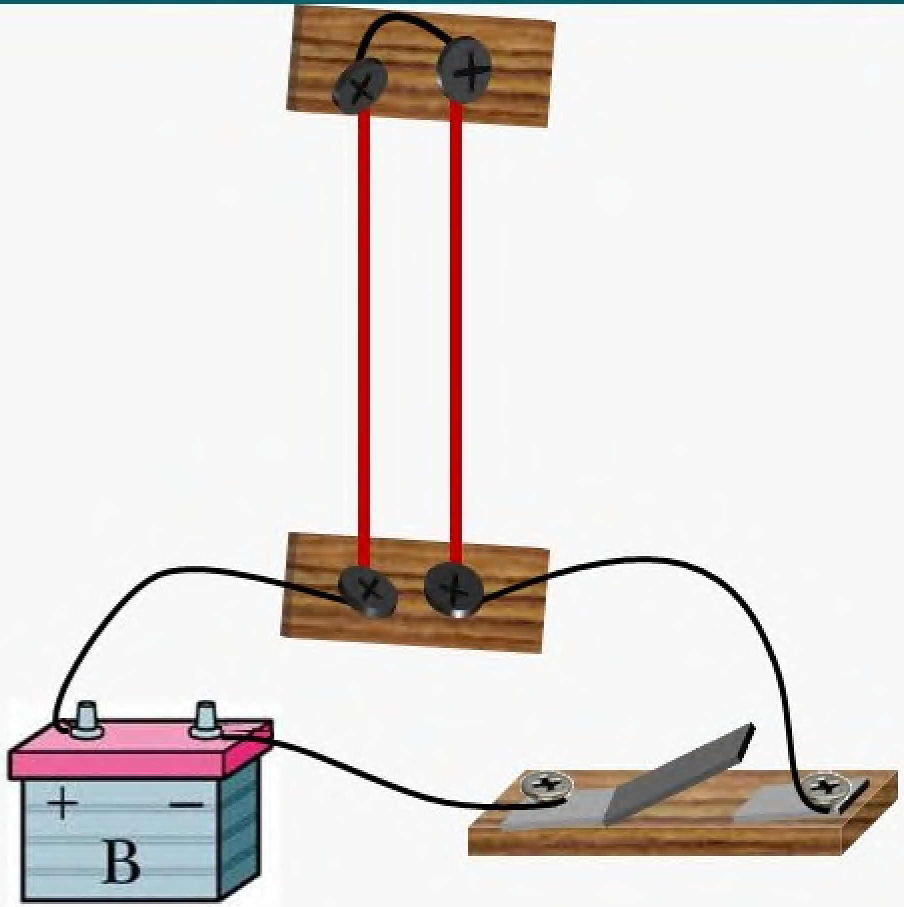
درس سی و پنجم

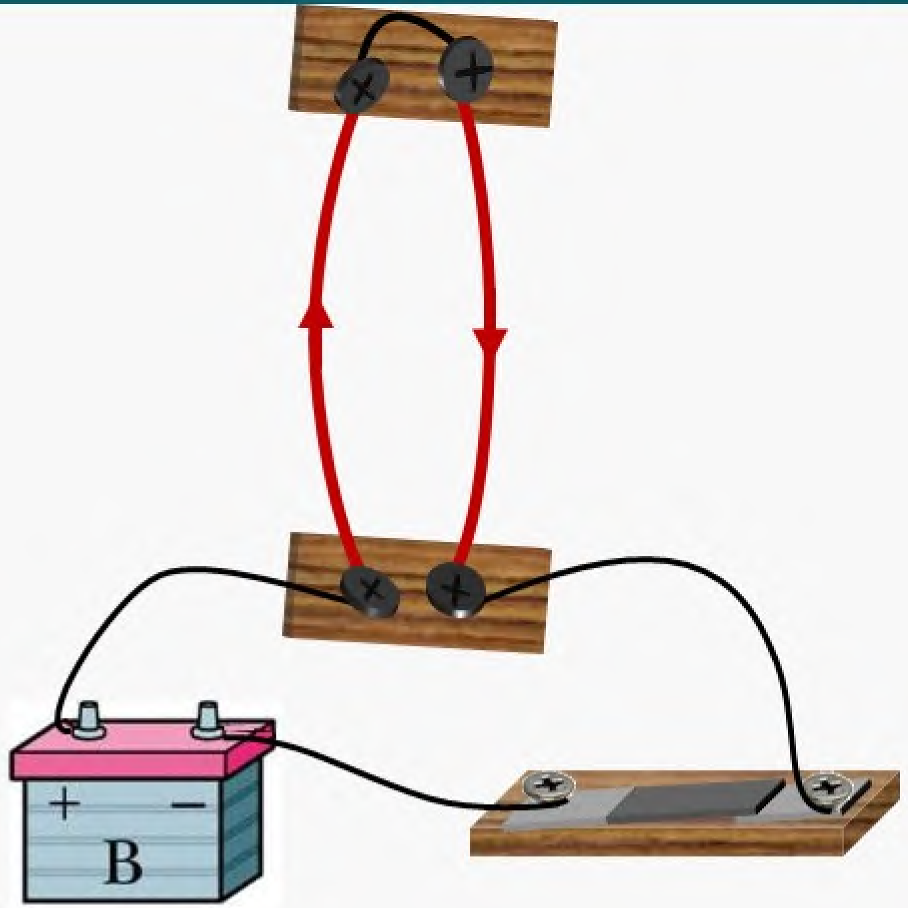
مغناطوستاتیک بخش اول

MagnetoStatics-part1

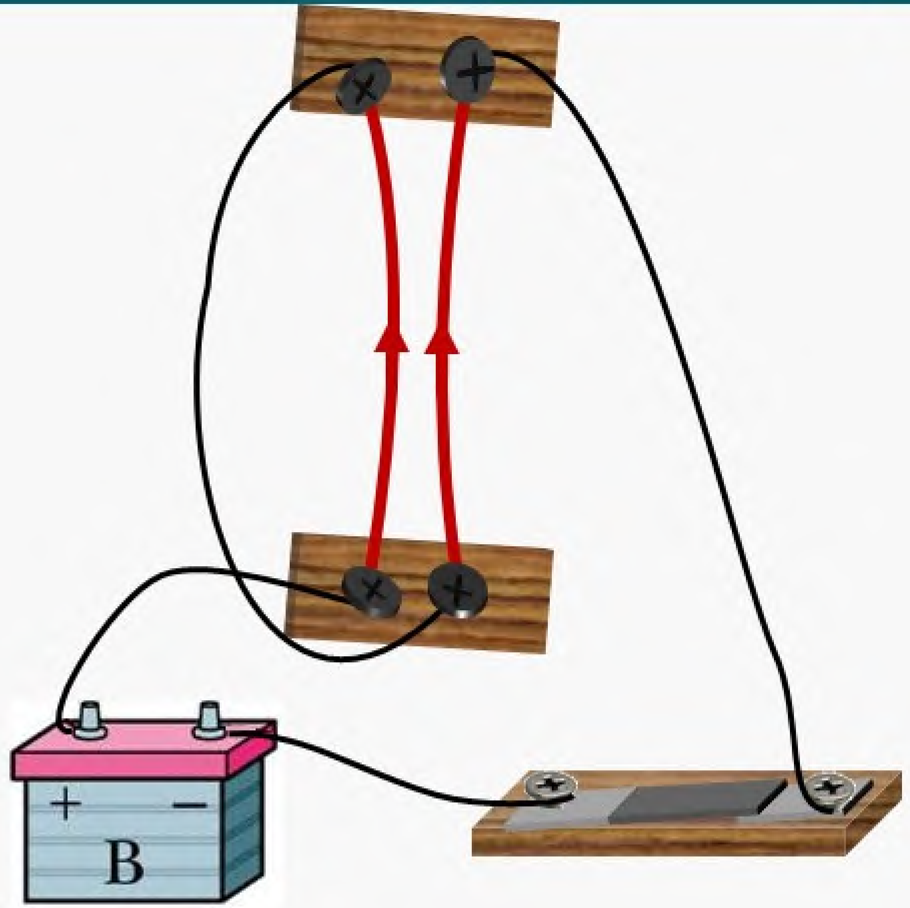
دانشگاه خوارزمی

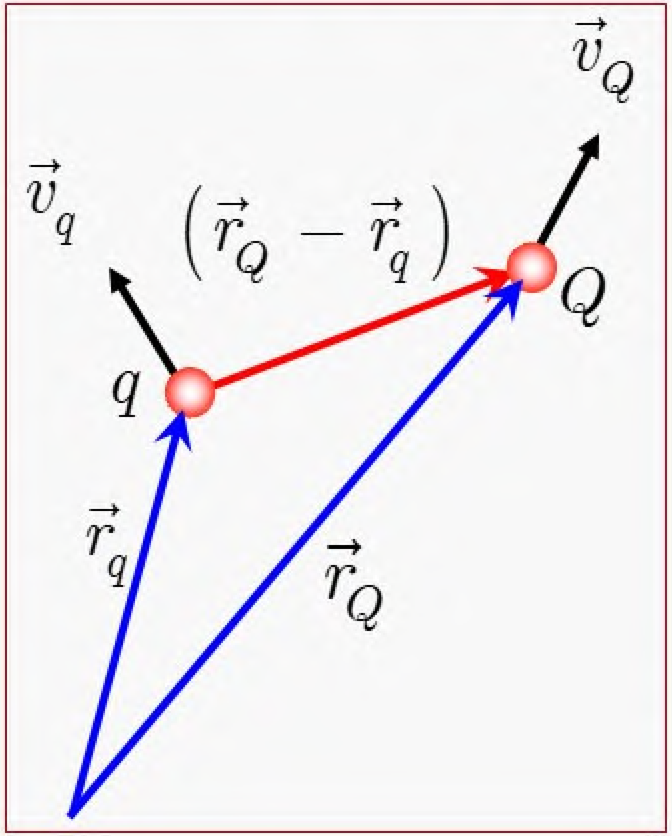

q_1
q_2
q_3
q_i
Q
$\vec{F}_i$


+
−
B


+
−
B

نیروی بین سیم‌های حامل جریان الکتریکی





نیروی الکتریکی وارد بر Q (از طرف q) :

$$\vec{F}_Q^E = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_q}{\left|\vec{r}_Q - \vec{r}_q\right|^3}$$

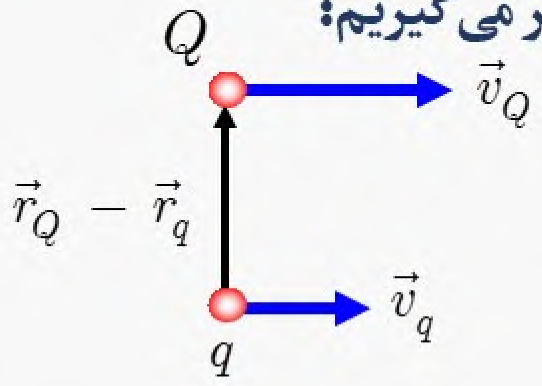
نیروی مغناطیسی وارد بر Q (از طرف q) :

$$\vec{F}_Q^M = \frac{\mu_0 Qq}{4\pi} \vec{v}_Q \times \left(\vec{v}_q \times \frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_q}{\left|\vec{r}_Q - \vec{r}_q\right|^3} \right)$$

ثابت تراوایی خلأ است $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \ \frac{\text{N-s}^2}{\text{C}^2} = 1.26 \times 10^{-6} \frac{\text{N-s}^2}{\text{C}^2}$

دانشگاه خوارزمی

وضعیت شکل زیر را در نظر می گیریم:



$$F^E = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left|\vec{r}_Q - \vec{r}_q\right|^2}$$

$$F^M = \frac{\mu_0 Qq}{4\pi} v_q v_Q \frac{1}{\left|\vec{r}_Q - \vec{r}_q\right|^2}$$

$$\frac{F^M}{F^E} = \mu_0\epsilon_0 v_q v_Q$$

$$\mu_0\epsilon_0 = \left(1.26\times 10^{-6}\ \frac{\text{N-s}^2}{\text{C}^2}\right)\left(8.85\times 10^{-12}\ \frac{\text{C}^2}{\text{N-m}^2}\right) = 1.2\times 10^{-17}\ \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}$$

$$\mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{\left(3\times 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = \frac{1}{c^2}\,!!$$

$$\frac{F^M}{F^E} = \frac{v_q}{c}\frac{v_Q}{c}$$

اگر سرعت ذرات نسبت به سرعت نور خیلی کوچک باشد، نیروی مغناطیسی بین آن ها از نیروی الکتریکی‌شان بسیار کوچک ترخواهد بود

دانشگاه خوارزمی

همان طور که نیروی الکتریکی را به خاصیتی از نقاط فضا به نام میدان الکتریکی نسبت دادیم، نیروی مغناطیسی بین ذرات باردار متحرک را با میدان مغناطیسی توصیف می کنیم.

برهم کنش الکتریکی :

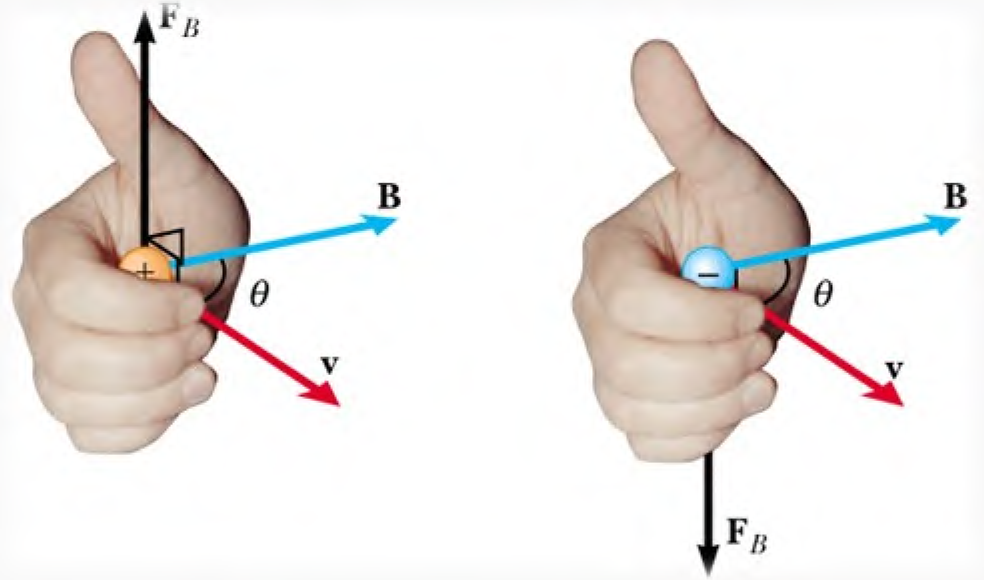
۱) بارهای الکتریکی ساکن در فضای اطراف خود میدان الکتریکی ایجاد می‌کنند.

۲) هرگا ه بار الکتریکی q در میدان الکتریکی قرار گیرد به آن نیرو وارد می‌شود

برهم کنش مغناطیسی :

۱) بارهای الکتریکی متحرک در فضای اطراف خود میدان مغناطیسی ایجاد می‌کنند. (علاوه بر میدان الکتریکی)

۲) هرگا ه بار الکتریکی متحرک q در میدان مغناطیسی قرار گیرد به آن نیرو وارد می‌شود



در هر نقطه از فضا میدان مغناطیسی را بر حسب نیروی مغناطیسی وارد بر بار الکتریکی متحرک در آن نقطه تعریف می‌کنیم:

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

یکای SI میدان مغناطیسی، تسلا نامیده می‌شود که معادل وبر بر متر مربع است.

$$1\mathrm{T} = 1\,\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2} = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A\text{-}m}}$$

یکای cgs میدان مغناطیسی، گوس نامیده می‌شود.

$$1\mathrm{T} = 10^4\mathrm{G}$$

در ناحیه‌ای که هم میدان مغناطیسی و هم میدان الکتریکی وجود دارد نیروی وارد بر ذره‌ی باردار متحرک برابر است با:

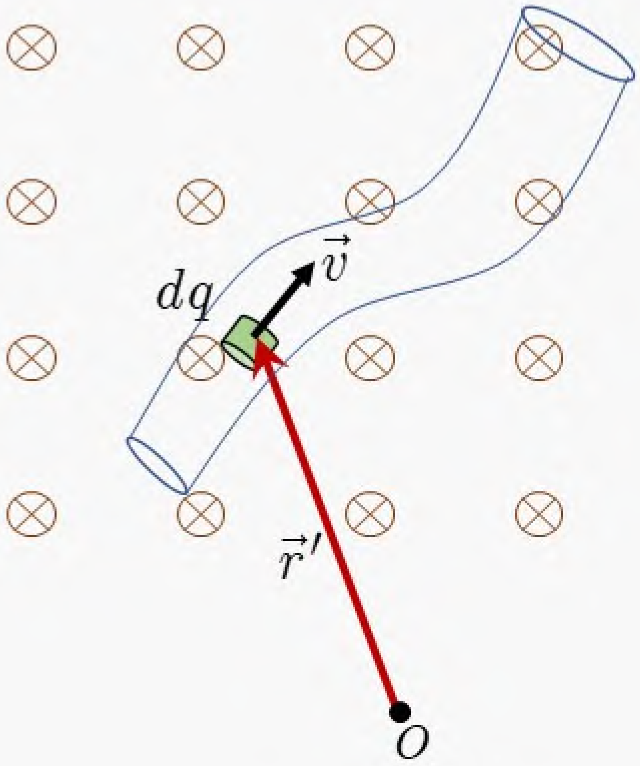
$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

که آن را **نیروی لورنتس** می‌نامیم

مثال ۵ - ۲ از کتاب گریفیتث

در ناحیه‌ای از فضا **میدان الکتریکی یکنواخت** در جهت محور z و **میدان مغناطیسی یکنواخت** در جهت محور x وجود دارد. ذره‌ی بارداری از حال سکون در مبدأ مختصات رها می‌شود. مسیر حرکت ذره را تعیین کنید

برنامه‌ای بنویسید (ترجیحا با پایتون) و مسیر حرکت ذره را ترسیم کنید



فرض کنید یک توزیع بار متحرک با چگالی حجمی ρ داریم

$$d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int dq\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int dq\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\boxed{dq = \rho(\vec{r}\,')dV'}$$

$$dq\vec{v} = \rho(\vec{r}\,')\vec{v}dV'$$

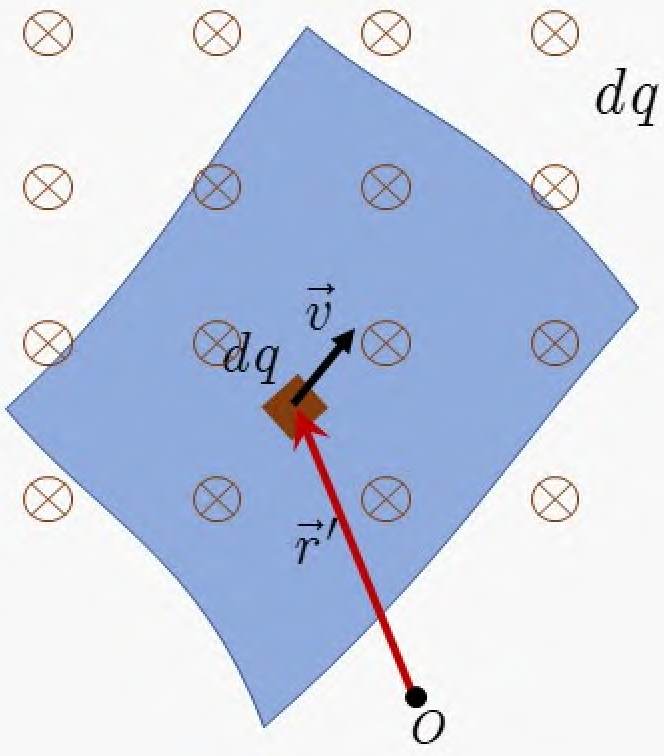
$$\boxed{\rho(\vec{r}\,')\vec{v} = \vec{J}(\vec{r}\,')}$$ **چگالی جریان**

$$\boxed{\vec{F} = \int \vec{J}(\vec{r}\,') \times \vec{B}dV'}$$

$$\boxed{I = \int \vec{J}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{a}\,' \qquad \left|\vec{J}\right| = \frac{dI}{da_\perp}}$$

دانشگاه خوارزمی

فرض کنید یک توزیع بار متحرک با چگالی سطحی σ داریم

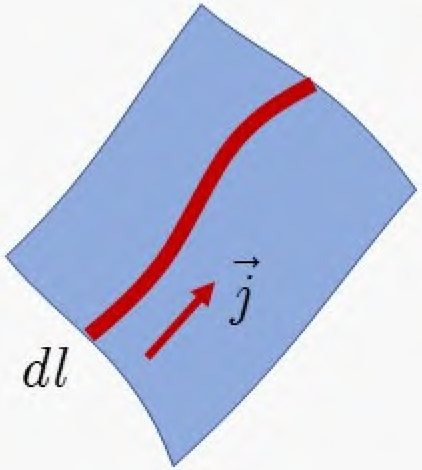


$$dq = \sigma(\vec{r}')da'$$

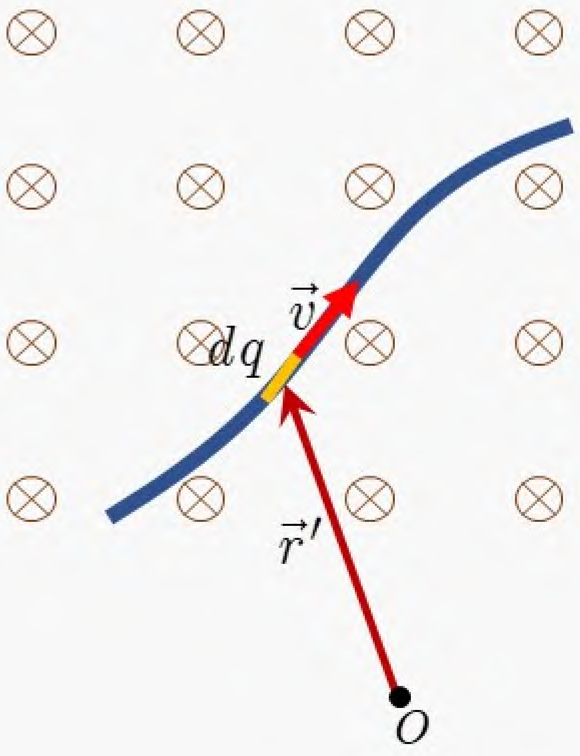
$$\boxed{\vec{F} = \int d\vec{F} = \int dq\vec{v} \times \vec{B}} \quad \boxed{dq\vec{v} = \sigma(\vec{r}')\vec{v}da' = \vec{j}(\vec{r}')da'}$$

$$\boxed{\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B}da'}$$

$$\boxed{\sigma(\vec{r}')\vec{v} = \vec{j}(\vec{r}')}$$ چگالی جریان لایه‌ای



$$\left|\vec{j}\right| = \frac{dI}{dl}$$



$$dq = \lambda(\vec{r}')dl'$$

فرض کنید یک توزیع بار متحرک با چگالی خطی λ داریم

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int dq\vec{v} \times \vec{B}$$

$$dq\vec{v} = \lambda(\vec{r}')\vec{v}dl' = \vec{I}(\vec{r}')dl'$$

$$\vec{F} = \int \vec{I}(\vec{r}') \times \vec{B}dl'$$

$$\lambda(\vec{r}')\vec{v} = \vec{I}(\vec{r}')$$

بردار جریان

$$\vec{I}dl' = I\hat{\tau}dl' = Id\vec{l}'$$

$$\vec{F} = \int Id\vec{l}' \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \int \vec{J}(\vec{r}') \times \vec{B} dv'$$

$$\vec{F} = \int \vec{j}(\vec{r}') \times \vec{B} da'$$

$$\vec{F} = \int I d\vec{l}' \times \vec{B}$$

نیروی مغناطیسی وارد بر Q (از طرف q):

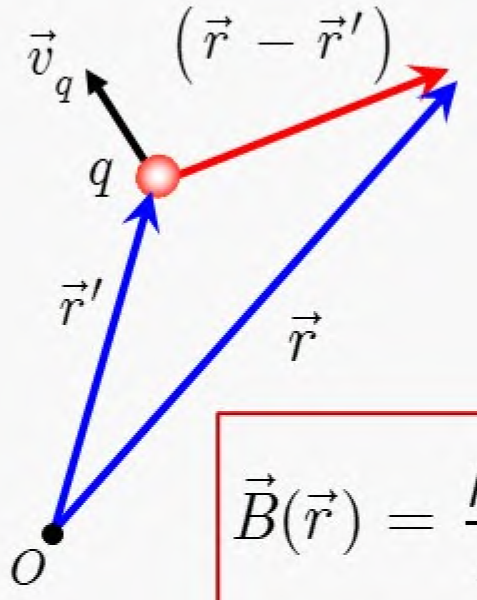
$$\vec{F}_Q^M = \frac{\mu_0 Q q}{4\pi}\,\vec{v}_Q \times \left(\vec{v}_q \times \frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_q}{\left|\vec{r}_Q - \vec{r}_q\right|^3}\right)$$

$$\vec{F}_Q^M = Q\,\vec{v}_Q \times \vec{B}_q$$

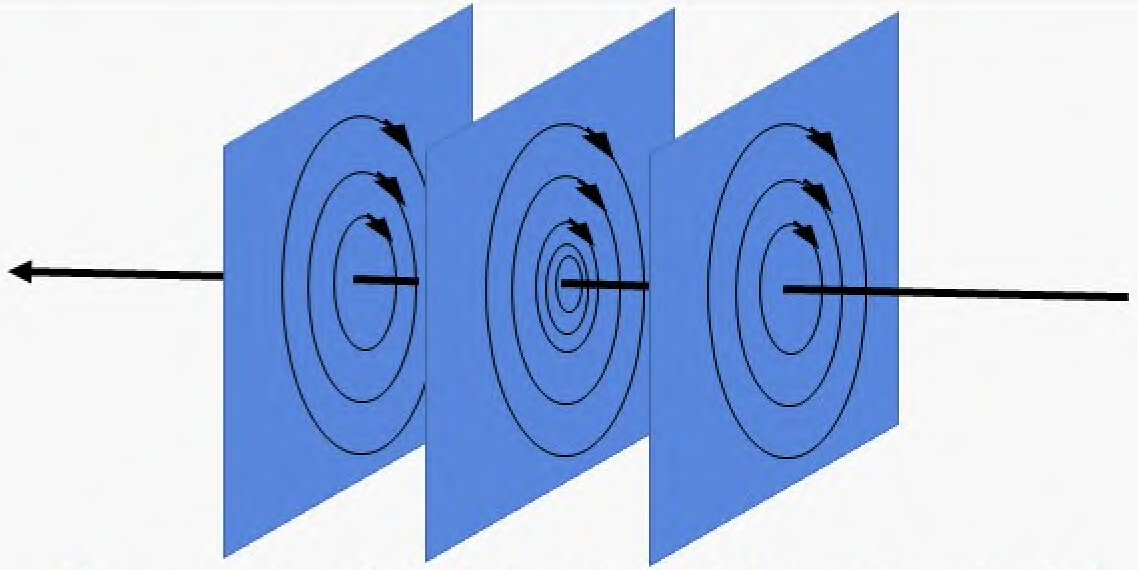
میدان مغناطیسی ناشی از بار q در محل بار Q :

$$\vec{B}_q = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\,\vec{v}_q \times \frac{\vec{r}_Q - \vec{r}_q}{\left|\vec{r}_Q - \vec{r}_q\right|^3}$$

دانشگاه خوارزمی



$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\,\vec{v}_q \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}}$$

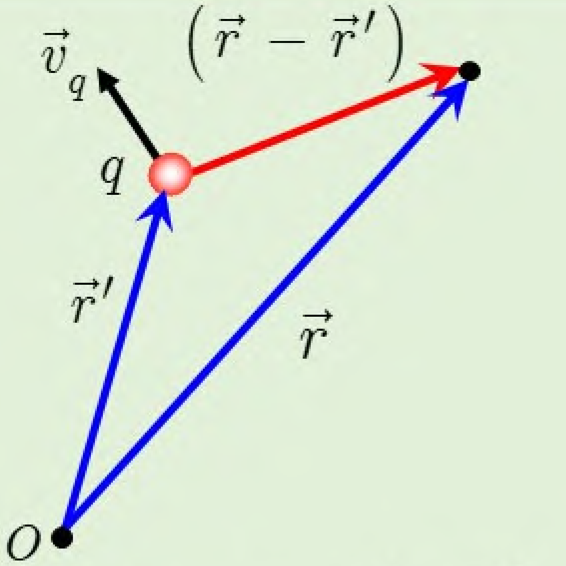


خطوط میدان مغناطیسی یک بار نقطه‌ای مثبت متحرک

اصل برهم‌نهی:

اگر چندین بار الکتریکی متحرک داشته باشیم، میدان مغناطیسی در هر نقطه از فضا برابر با برآیند برداری میدان‌های مغناطیسی است که هر یک از بارهای الکتریکی در آن نقطه ایجاد می‌کنند. $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \ldots$

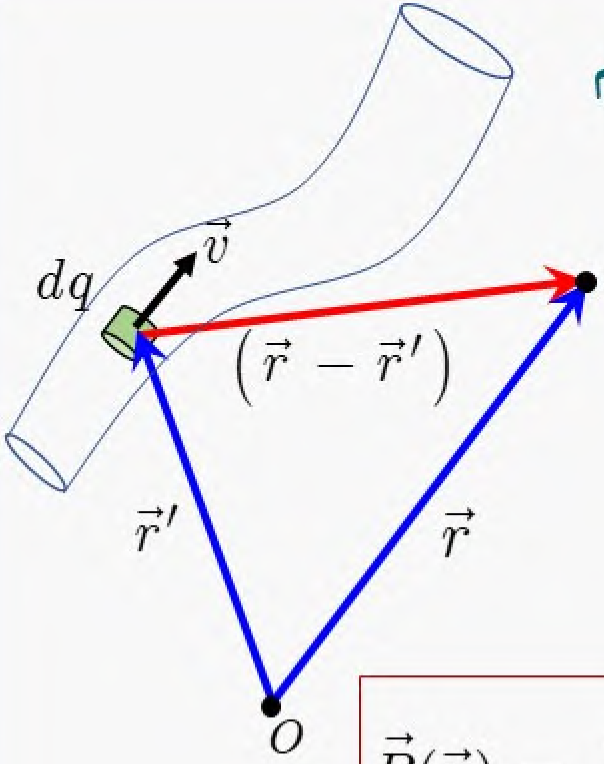
دانشگاه خوارزمی



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\,\vec{v}_q \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}$$

میدان مغناطیسی ناشی از بار نقطه‌ای متحرک

فرض کنید یک توزیع بار متحرک با چگالی حجمی ρ داریم



$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 dq}{4\pi}\,\vec{v} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int d\vec{B}(\vec{r}) = \int \frac{\mu_0 \rho(\vec{r}\,')}{4\pi}\,\vec{v} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dV'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} dV'$$

میدان ناشی از توزیع حجمی بار متحرک:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} dv'$$

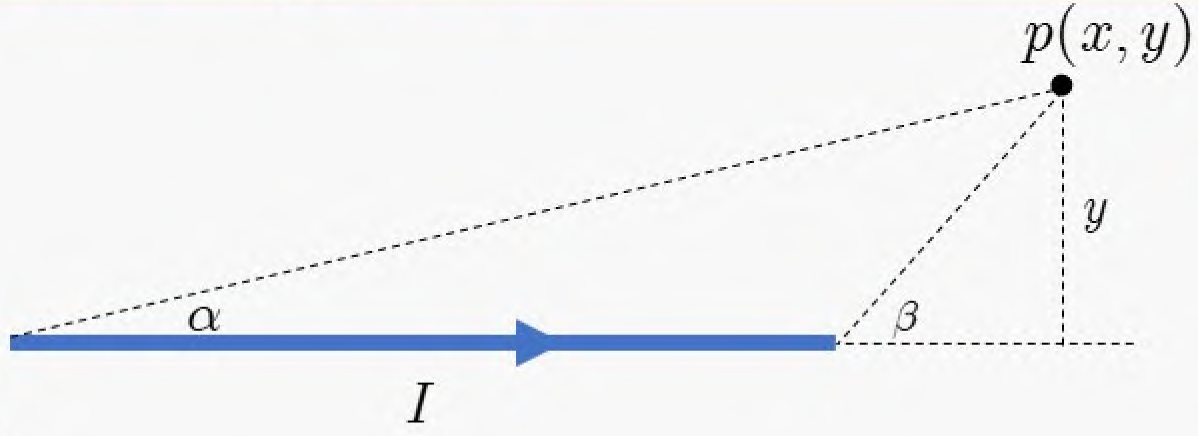
میدان ناشی از توزیع سطحی بار متحرک:

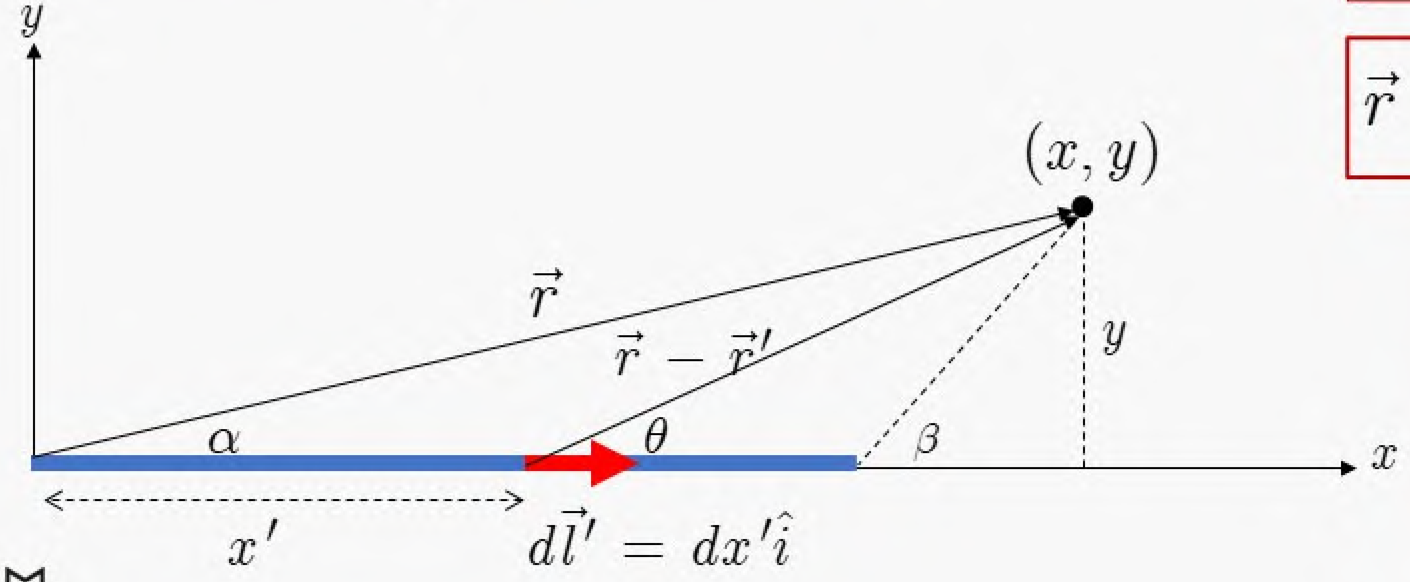
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} da'$$

میدان ناشی از توزیع خطی بار متحرک:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int d\vec{l}' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

شکل زیر یک سیم راست را نشان می‌دهد که بخشی از مداری حامل جریان I است. میدان مغناطیس ناشی از این قطعه سیم را در نقطه‌ی p به دست آورید.





$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

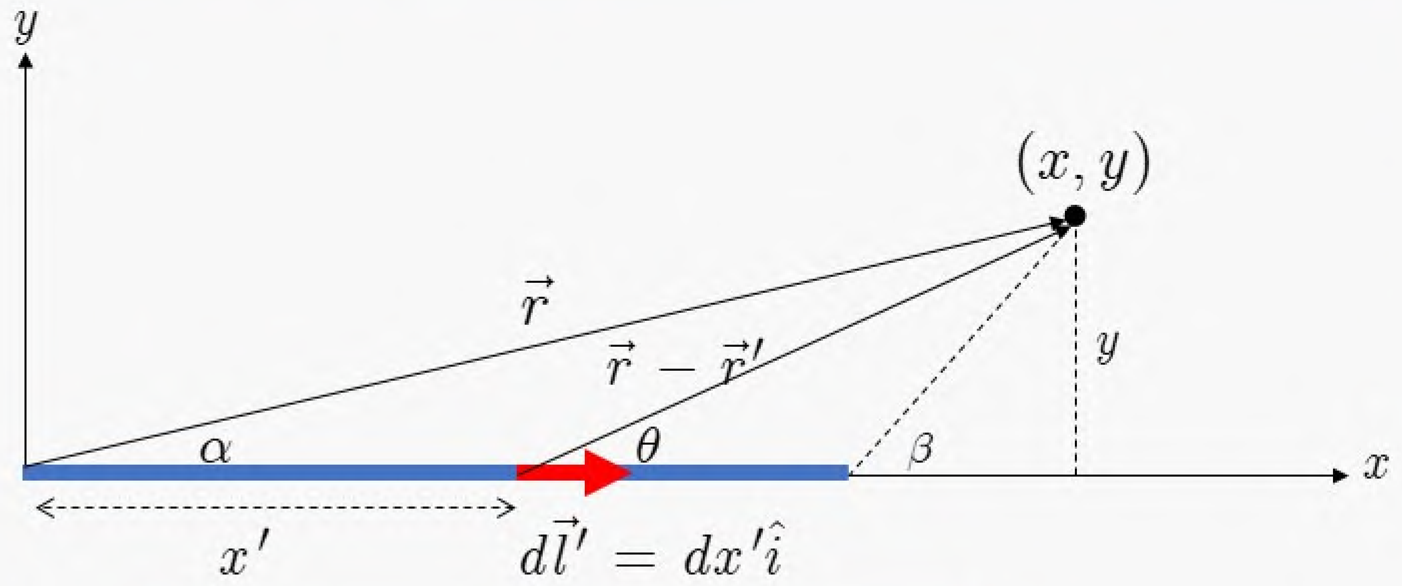
$$\vec{r}' = x'\hat{i}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \left(x - x'\right)\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int d\vec{l}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^L \frac{y\,dx'}{\left[(x - x')^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

مثال



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^L \frac{y dx'}{\left[(x - x')^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

$$x - x' = y\cot\theta$$

$$dx' = y(1 + \cot^2\theta)d\theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y}\hat{k}\int_\alpha^\beta \sin\theta d\theta$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y}\hat{k}\left(\cos\alpha - \cos\beta\right)$$

در صورتی که طول سیم نامتناهی باشد:

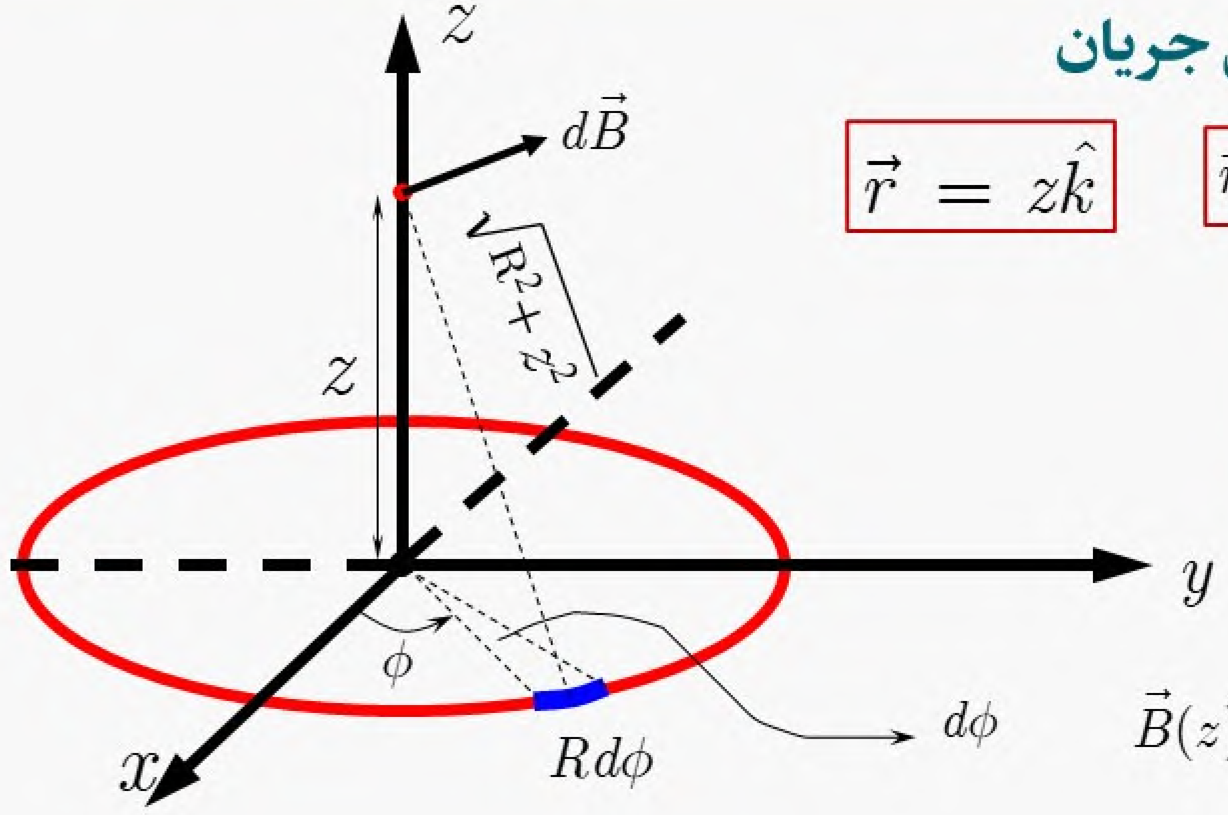
$$\alpha = 0; \qquad \beta = \pi$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{\phi}$$

دانشگاه خوارزمی

میدان مغناطیسی ناشی از یک حلقه‌ی دایره‌ای حامل جریان



$$\boxed{\vec{r} = z\hat{k}} \qquad \boxed{\vec{r}\,' = R\hat{\rho}} \qquad \boxed{\vec{r} - \vec{r}\,' = z\hat{k} - R\hat{\rho}}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int d\vec{l}\,' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3}}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{k}$$

لطفا مسئله‌ی حلقه‌ی جریان مربعی، مستطیلی و n ضلعی را خودتان حل بفرمایید.

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3} dv'}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \cdot \left[\vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right] dv'}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \vec{G} \cdot \left(\nabla \times \vec{F}\right) - \vec{F} \cdot \left(\nabla \times \vec{G}\right)}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \left[\vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right] = \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3} \cdot \cancelto{0}{\left(\nabla \times \vec{J}(\vec{r}\,')\right)} - \vec{J}(\vec{r}\,') \cdot \cancelto{0}{\left(\nabla \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right)}}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0}$$

دانشگاه خوارزمی

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3} dv'$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla \times \left[\vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right] dv'$$

$$\nabla \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F} - \left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\nabla\cdot\vec{G}\right) - \vec{G}\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)$$

$$\nabla \times \left[\vec{J}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right] = -\left(\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\nabla\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3} + \vec{J}(\vec{r}\,')\underbrace{\left(\nabla\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\right)}_{4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{J}(\vec{r}\,')4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,dv' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int \left(\vec{J}(\vec{r}\,')\cdot\nabla\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3} dv'$$

نشان خواهیم داد انتگرال دوم برای جریان‌های پایا صفر است.

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0\vec{J}(\vec{r})$$

شکل دیفرانسیلی قانون آمپر

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left(\vec{J}(\vec{r}')\cdot\nabla\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}dv' = ?$$

$$-\left(\vec{J}(\vec{r}')\cdot\nabla\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} = \left(\vec{J}(\vec{r}')\cdot\nabla'\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$

$$\left(\vec{J}(\vec{r}')\cdot\nabla'\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} = \left(\vec{J}(\vec{r}')\cdot\nabla'\right)\left[\frac{x-x'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\hat{i}+\frac{y-y'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\hat{j}+\frac{z-z'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\hat{k}\right]$$

$$\vec{J}(\vec{r}')\cdot\nabla'\frac{x-x'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} = \nabla'\cdot\left[\frac{x-x'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\vec{J}(\vec{r}')\right]-\frac{x-x'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}')$$

$\rightarrow 0$ برای جریان‌های پایا

$$\int\vec{J}(\vec{r}')\cdot\nabla'\frac{x-x'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}dv' = \int\nabla'\cdot\left[\frac{x-x'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\vec{J}(\vec{r}')\right]dv' = \oint_S\frac{x-x'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\vec{J}(\vec{r}')\cdot\hat{n}\,da' = 0$$

در مورد تبدیل این انتگرال حجمی به سطحی بحث کنید و توضیح بدهید که چرا نتیجه‌ی آن صفر می‌شود

دانشگاه خوارزمی

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r})$$

دانشگاه خوارزمی

شاد و مهربان باشید

دانشگاه خوارزمی