شماره‌ی تکلیف: ۲۳

مسئله‌ی ۱:

قضیه‌ی مقدار میانگین را اثبات کنید.
قضیه‌ی مقدار میانگین: در یک ناحیه‌ی تهی از بار، پتانسیلِ الکتریکی در هر نقطه برابر است با میانگین پتانسیل روی سطحِ کره‌ای به مرکزِ آن نقطه.

پاسخ ۱:

در ناحیه‌ی تهی از بار کره‌ای به شعاعِ R در نظر می‌گیریم. میانگینِ پتانسیل بر روی سطحِ این کره برابر است با:

$$\langle\Phi\rangle = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_S \Phi(\boldsymbol{r})da$$

اما با توجه به این که $da = R^2 d\Omega$ می‌توان نوشت:

$$\langle\Phi\rangle = \frac{1}{4\pi}\oint_S \Phi(\boldsymbol{r})d\Omega$$

از این رابطه نسبت به R مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d\langle\Phi\rangle}{dR} = \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r})}{\partial R}d\Omega$$

اما

$$\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{r})}{\partial R} = \boldsymbol{\nabla}\Phi\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$$

که در آن $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_r$ بردار یکه‌ی عمود بر سطحِ کره است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{d\langle\Phi\rangle}{dR} = \frac{1}{4\pi}\oint_S \boldsymbol{\nabla}\Phi\cdot\hat{\boldsymbol{n}}d\Omega$$

حال اگر باز از تساوی $da = R^2 d\Omega$ استفاده کنیم:

$$\frac{d\langle\Phi\rangle}{dR} = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_S \boldsymbol{\nabla}\Phi\cdot\hat{\boldsymbol{n}}da$$

با استفاده از قضیه‌ی واگرایی برای طرفِ راستِ تساویِ فوق می‌توان نوشت:

$$\frac{d\langle\Phi\rangle}{dR} = \frac{1}{4\pi R^2}\int_V \boldsymbol{\nabla}^2\Phi d^3\boldsymbol{r}$$

اما برای ناحیه‌ی تهی از بار $\boldsymbol{\nabla}^2\Phi = 0$ بنابر این

$$\frac{d\langle\Phi\rangle}{dR} = 0$$

یعنی برای یک ناحیه‌ی تهی از بار داریم:

$$\langle\Phi\rangle = \text{ثابت}$$

به بیانِ دیگر مقدار میانگین پتانسیل به شعاعِ کره بستگی ندارد:

$$\langle\Phi\rangle = \langle\Phi(r=R)\rangle = \langle\Phi(r=0)\rangle = \Phi\Big|_{\text{مرکز کره}}$$

مسئله‌ی ۲:

قضیه‌ی ارنشاو را اثبات کنید.
قضیه‌ی ارنشاو: تابع پتانسیل که در معادله‌ی لاپلاس $\nabla^2\Phi = 0$ صدق می‌کند، دارای بیشینه یا کمینه‌ی موضعی نیست.

پاسخ ۲:
قضیه را با برهانِ خُلف حل می‌کنیم. فرض کنید پتانسیل در یک نقطه کمینه باشد. بنابر این تمامِ نقاطِ اطرافِ آن دارای پتانسیلِ بیش‌تری هستند. پس اگر کره‌ای به مرکزِ آن نقطه در نظر بگیریم میانگینِ پتانسیل بر روی سطح این کره از پتانسیل در مرکز کره بیش‌تر است:

$$\Phi\Big|_{\text{مرکز کره}} > \langle \Phi(r = R) \rangle$$

و این خلافِ قضیه‌ی مقدارِ میانگین است.
هم‌چنین اگر فرض کنیم پتانسیل در نقطه‌ای بیشینه باشد، آن‌گاه:

$$\Phi\Big|_{\text{مرکز کره}} < \langle \Phi(r = R) \rangle$$

که باز هم بر خلافِ قضیه‌ی مقدارِ میانگین است.
تعبیر فیزیکی قضیه‌ی ارنشاو این است که یک ذره‌ی باردار نمی‌تواند در حضور یک میدان الکتریکی خالص در تعادل پایدار باشد.